Cyfrowa obróbka sygnałów

Elementy rachunku macierzowego

wykład № 5

Elementy algebry macierzy

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

- Filtracja
- Korelacja
- Transformata kosinusowa
- Transformata Fouriera
- Splot liniowy
- Splot cykliczny
- Transformata falkowa
- inne...

$$Y = M \cdot X$$

Algorytmy redukujące liczbę operacji arytmetycznych w zadaniach CPS

$Y=M\cdot X$

N^2 mnożeń

$N(N-1)$ dodawań

- Metoda Strassena
- Metoda Winograda
- Metoda Radera-Brannera
- Metoda Cooley'a-Tukey'a
- Metoda Nussbaumera
- inne...
- Metoda Cooka – Tooma

Teoria wielomianów

Chińskie twierdzenie o resztach

Charakterystyczne cechy funkcji bazowych

Wektor. Iloczyn skalarny

$$\mathbf{A}_{N\times 1} = [a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{X}_{N\times 1} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x_i$$

$$y = [\mathbf{A}_{N\times 1}]^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

Wektor. Iloczyn Hadamarda

$$y = \mathbf{A}_{N\times 1} \blacksquare \mathbf{X}_{N\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \cdot x_0 \\ a_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \cdot x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \blacksquare \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Zwektoryzowany iloczyn Hadamarda

"$\circ$" – operacja „zwektoryzowanego iloczynu Hadamarda" - została wprowadzona dla wygody opisu procedury jednoczesnego mnożenia wybranych elementów wektora - będzie przekształcać pewien wektor danych $\mathbf{X}_{N\text{-}1}$ o wymiarze $N\times\mathbf{1}$ w wektor wyjściowy $\mathbf{Y}_{M\text{-}1}$ o wymiarze $M\times\mathbf{1}$ w następujący sposób:

$$\mathbf{Y}_{M\times 1} = \mathbf{B}_{M\times N} \circ \mathbf{X}_{N\times 1}$$

$$\mathbf{B}_{M\times N} = \left\| b_{m,n} \right\|,\ m = \overline{0, M-1},\ n = \overline{0, N-1}$$

- macierz-maska, składająca się z zer i jedynek, a elementy są wyznaczone według reguły:

$$y_i = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N-1} b_{m,n} x_n, \text{dla} \sum\limits_{n=0}^{N-1} b_{m,n} = 1 \\ \prod\limits_{n=0}^{N-1} b_{m,n} x_n, dla \sum\limits_{n=0}^{N-1} b_{m,n} > 1 \end{cases} \quad \forall i = \overline{0, M-1}$$

$\prod\limits_{n=0}^{N-1}$ - symbol iloczynu ciągu liczb numerowanych według *n*.

Zwektoryzowany iloczyn Hadamarda

Macierz **B**
maskowania
mnożeń

$$
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} x_0 x_1 \\ x_2 x_3 \\ x_4 x_5 \\ x_6 x_7 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & & & & \\
& & 1 & 1 & & & & \\
& & & & 1 & 1 & & \\
& & & & & & 1 & 1
\end{bmatrix} \circ
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}
$$

Zwektoryzowany iloczyn Hadamarda

Macierz **B** maskowania mnożeń

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 x_4 \\ x_1 x_5 \\ x_2 x_6 \\ x_3 x_7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right] \circ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Macierz oraz jej transpozycja

$$\mathbf{A}_{N\times M} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}_{N\times M}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{N-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Macierz oraz jej transpozycja

$$\mathbf{A}_{N\times M} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}_{N\times M}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{N-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Macierz oraz jej transpozycja

$$\mathbf{A}_{N\times M} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}_{N\times M}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{N-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna

$$\mathbf{D}_N = diag(d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}) = \begin{bmatrix} d_0 & & & \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{R\times F} = quasidiag(\mathbf{D}_{K\times L}, \mathbf{D}_{M\times N}, \ldots, \mathbf{D}_{S\times P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{K\times L} & & & \\ & \mathbf{D}_{M\times N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{D}_{S\times P} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}_N$ - macierz jednostkowa o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu,

$$\mathbf{I}_8 = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{e}_{1\times N}^{(n)}$ - *n*-ty wiersz macierzy jednostkowej rzędu *N*;

$$\mathbf{e}_{1\times 8}^{(3)} = [0,0,0,1,0,0,0,0]$$

$\mathbf{I}_N^{(\alpha\rightarrow)}$

$\mathbf{I}_N^{(\leftarrow\alpha)}$

- macierze jednostkowe rzędu , których kolumny są cyklicznie przesunięte względem pierwotnej postaci o zdefiniowaną za pomocą górnego indeksu liczbę pozycji w kierunku określonym strzałką;

$$\mathbf{I}_8^{(2\rightarrow)} = \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_8^{(\leftarrow 2)} = \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_8^{(2\rightarrow)} = \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_8^{(\leftarrow 2)} = \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}_{N \times M}$ - macierz zerowa o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu,

$$\mathbf{0}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{1}_{N \times L}$ - macierz składająca się z jedynek o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu;

$$\mathbf{1}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Suma prosta (tensorowa)

$$\left.\begin{array}{l} \oplus \\[1em] \bigoplus_{i=0}^{N-1} \end{array}\right\}$$ - są symbolami sumy prostej (tensorowej) dwóch lub wielu macierzy odpowiednio,

$$\mathbf{A}_{N\times M} \oplus \mathbf{B}_{K\times L} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{N\times M} & \\ \hline & \mathbf{B}_{K\times L} \end{array}\right],$$

$$\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_{L\times M}^{(i)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{L\times M}^{(0)} & & & \\ \hline & \mathbf{A}_{L\times M}^{(1)} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \mathbf{A}_{L\times M}^{(N-1)} \end{array}\right]$$

Iloczyn Kroneckera (tensorowy)

$$\left.\begin{array}{c} \otimes \\ \bigotimes_{i=0}^{N-1} \end{array}\right\}$$

- są symbolami iloczynu Kroneckera dwóch lub wielu macierzy odpowiednio,

$$\mathbf{A}_{N\times M} \otimes \mathbf{B}_{K\times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0}\mathbf{B}_{K\times L} & a_{0,1}\mathbf{B}_{K\times L} & \cdots & a_{0,N-1}\mathbf{B}_{K\times L} \\ a_{1,0}\mathbf{B}_{K\times L} & a_{1,1}\mathbf{B}_{K\times L} & \cdots & a_{1,N-1}\mathbf{B}_{K\times L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0}\mathbf{B}_{K\times L} & a_{N-1,1}\mathbf{B}_{K\times L} & \cdots & a_{N-1,N-1}\mathbf{B}_{K\times L} \end{bmatrix}$$

Konkatenacja pozioma

$\blacksquare | \blacksquare$

$\overset{N-1}{\underset{n=0}{\blacksquare | \blacksquare}}$

- symbole operacji odpowiednio poziomej konkatenacji dwóch lub wielu macierzy

$$\mathbf{A}_{N \times L} \blacksquare | \blacksquare \mathbf{B}_{N \times M} = [\mathbf{A}_{N \times L}, \mathbf{B}_{N \times M}]$$

$$\mathbf{Y}_{N \times \sum_{j=0}^{L-1} K_i} = \overset{N-1}{\underset{n=0}{\blacksquare | \blacksquare}} \mathbf{A}_{N \times K_j}^{(i)} = [\mathbf{A}_{N \times K_0}^{(0)}, \mathbf{A}_{N \times K_1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{N \times K_{L-1}}^{(N-1)}]$$

Konkatenacja pionowa

$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$

$\overset{N-1}{\underset{i=0}{\frac{\blacksquare}{\blacksquare}}}$

- symbole operacji odpowiednio pionowej konkatenacji dwóch lub wielu macierzy

$$\mathbf{A}_{N\times L} \frac{\blacksquare}{\blacksquare} \mathbf{B}_{M\times L} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{N\times L} \\ \hline \mathbf{B}_{M\times L} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{Y}_{\sum\limits_{j=0}^{L-1} K_j \times M} = \overset{N-1}{\underset{i=0}{\frac{\blacksquare}{\blacksquare}}} \mathbf{A}^{(i)}_{K_j\times M} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}^{(i)}_{K_0\times M} \\ \hline \mathbf{A}^{(1)}_{K_1\times M} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{A}^{(N-1)}_{K_{L-1}\times M} \end{array}\right]$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy I

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} a_{0,i} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1,i} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy I

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} a_{0,i} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1,i} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy I

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} a_{0,i} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1,i} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy II

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{N-1,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{0,N-1} \\ a_{1,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot x_{N-1}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy II

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{N-1,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{0,N-1} \\ a_{1,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot x_{N-1}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy II

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{N-1,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{0,N-1} \\ a_{1,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot x_{N-1}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L}=\begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0}} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L}=\begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1}} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L}=\begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)}} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L}=\begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0}} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1}} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L}=\begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \boxed{\sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1}} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N\times L}=\begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,0} & \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{0,i}x_{i,(L-1)} \\ \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,0} & \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{1,i}x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,0} & \sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,1} & \cdots & \boxed{\sum\limits_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i}x_{i,(L-1)}} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}_{M\times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(0)}_{N\times 1} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}^{(0)}_{M\times 1}$$

$$\mathbf{X}^{(0)}_{M\times 1} = [x_{0,0}, x_{1,0}, \ldots, x_{(M-1),0}]^{\mathrm{T}}$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}_{M\times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(1)}_{N\times 1} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}^{(1)}_{M\times 1}$$

$$\mathbf{X}^{(1)}_{M\times 1} = [x_{0,1}, x_{1,1}, \ldots, x_{(M-1),1}]^{\mathrm{T}}$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}_{M\times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times 1}^{(L-1)} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}_{M\times 1}^{(L-1)}$$

$$\mathbf{X}_{M\times 1}^{(L-1)} = [x_{0,(L-1)}, x_{1,(L-1)}, \ldots, x_{(M-1),(L-1)}]^{\mathrm{T}}$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}_{M\times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times L} = \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{Y}^{(i)}_{N\times 1} = \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{A}_{N\times M} \cdot \mathbf{X}^{(i)}_{M\times 1})$$

$$\mathbf{Y}^{(i)}_{N\times 1} = [y_{0,i}, y_{1,i}, \ldots, y_{(N-1),i}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{X}^{(i)}_{M\times 1} = [x_{0,i}, x_{1,i}, \ldots, x_{(M-1),i}]^{\mathrm{T}}$$

Metoda Strassena

Strassen's Approach

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

- p1 = a(f – h)
- p2 = (a+b)h
- p3 = (c+d)e
- p4 = d(g-e)
- p5 = (a+d)(e + h)
- p6 = (b-d)(g+h)
- p7 = (a-c)(e+f)

- r = p5 + p4 - p2 + p6
- s = p1 + p2
- t = p3 + p4
- u = p5 + p1 – p3 – p7

- 7 multiplications
- 18 additions

$O(N^{2.376})$

Metoda Winograda

Wzor Winograda do wyznaczania iloczynu skalarnego

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 = (a_0 + x_1)(a_1 + x_0) - a_0 a_1 - x_0 x_1$$

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_0 + x_1)(a_1 + x_0) + (a_2 + x_3)(a_3 + x_2) \\ - a_0 a_1 - a_2 a_3 - x_0 x_1 - x_2 x_3$$

Metoda Winograda

Zależy tylko od ***i***, więc nie wymaga obliczeń dla każdego ***j***

$$y_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} \cdot x_{k,j} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\left(a_{i,2k} + x_{2k+1,j} \right) \cdot \left(a_{i,2k+1} + x_{2k,i} \right) \right] - \boxed{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{i,2k} \cdot a_{i,2k+1}} - \boxed{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k,j} \cdot x_{2k+1,j}}$$

Zależy tylko od ***j***, więc nie wymaga obliczeń dla każdego ***i***

$N^3 \Rightarrow \frac{N^3}{2} + N^2$

$N^2 \cdot (N-1) \Rightarrow N^2 \cdot (N-1) + N \cdot (N-1)$

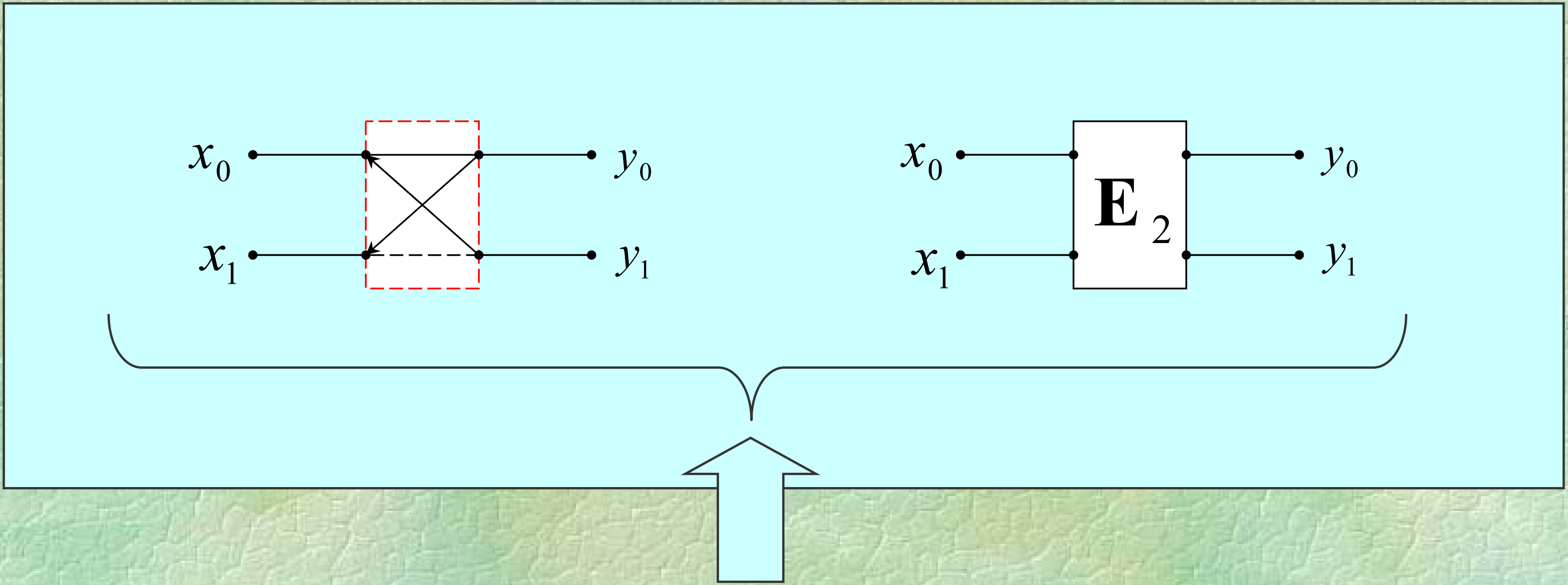
Metoda Winograda

	Metoda klasyczna		Metoda Winograda	
Rozmiar macierzy	***Liczba mnożeń***	***Liczba dodawań***	***Liczba mnożeń***	***Liczba dodawań***
2	8	4	8	6
4	64	48	48	60
8	512	448	320	504
16	4096	3840	2304	4080
32	32768	31744	17408	32736
64	262144	258048	135168	262080
128	2097152	2080768	1064960	2097024

REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH DRUGIEGO RZĘDU

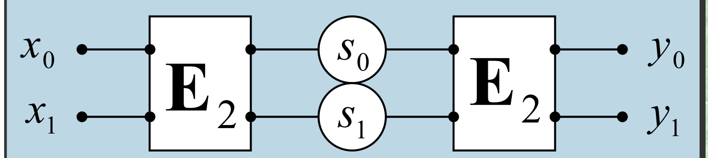
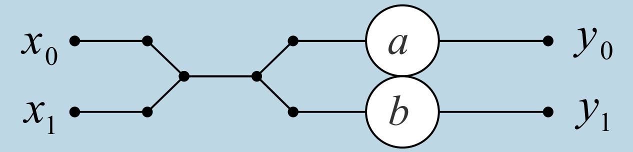
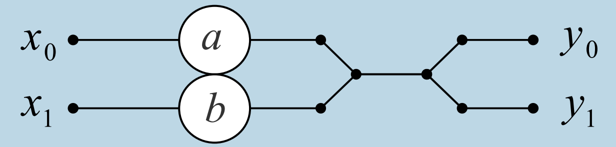
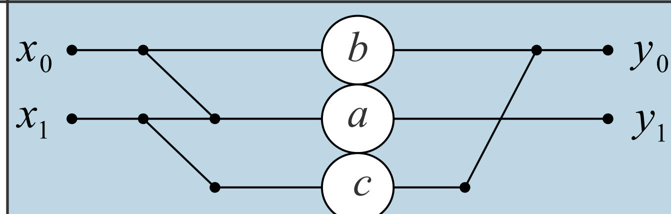
Macierz Hadamarda 2-go rzedu

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



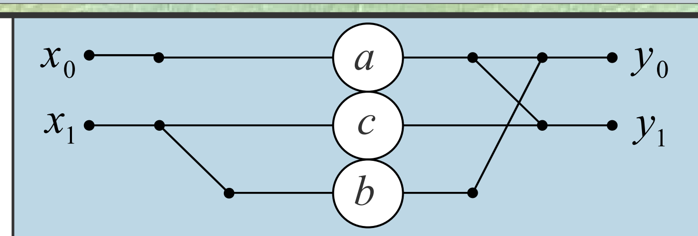
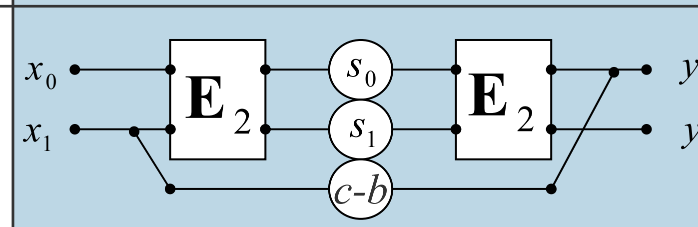
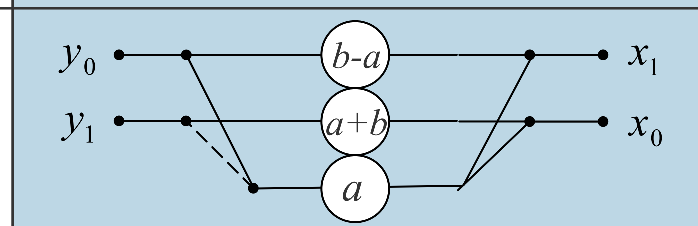
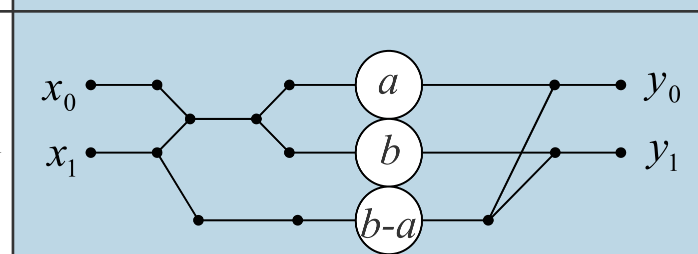
$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH DRUGIEGO RZĘDU*

<table>
<tr>
<td>$\mathbf{A}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$</td>
<td>$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} a+b & \\ & a-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathbf{A}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$</td>
<td>$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(2)} = \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathbf{A}_2^{(3)} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$</td>
<td>$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathbf{A}_2^{(4)} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix}$</td>
<td>$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & & \\ & a & \\ & & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

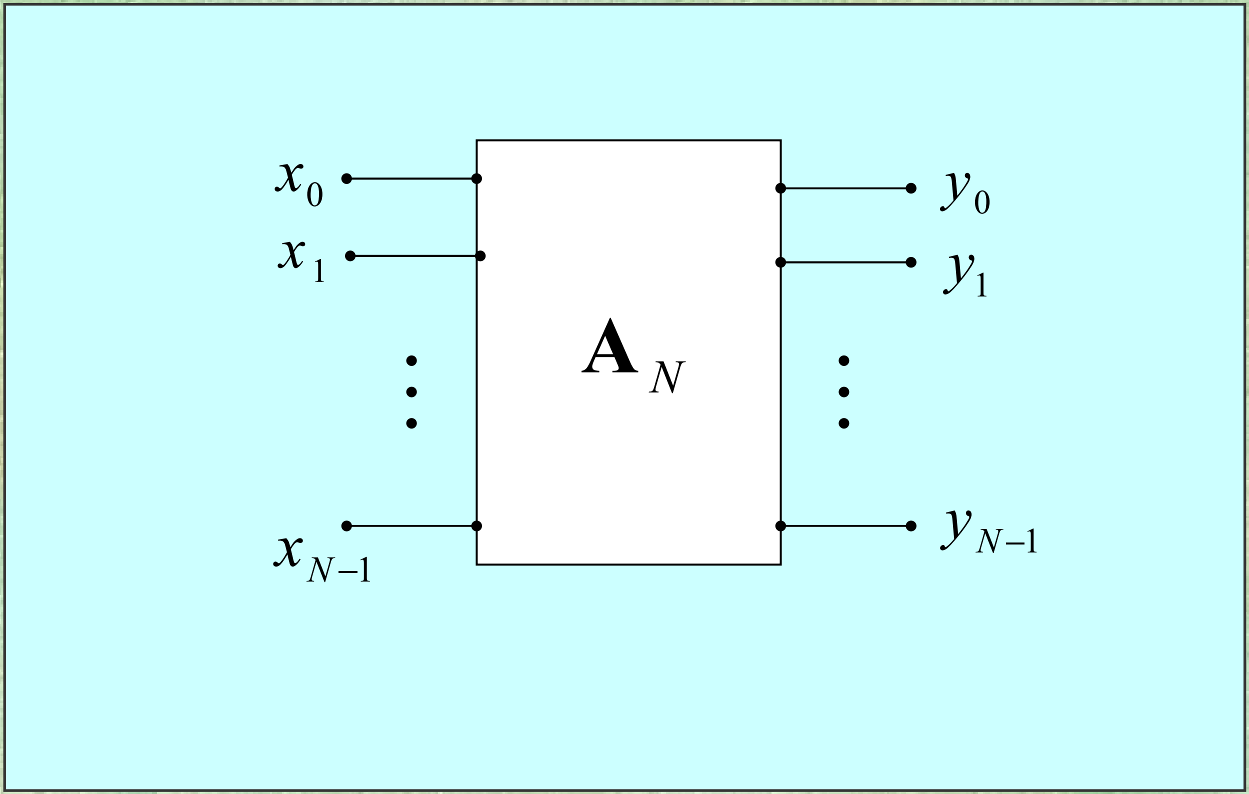
* *Alexandr Țariov, Marcin Adamski* „Redukcja liczby mnożeń przy wyznaczeniu iloczynów wektora przez macierze wartościstałych drugiego rzędu”. Metody informatyki stosowanej. Roczniki informatyki stosowanej WIPS, Nr 8, Szczecin, Informa, 2005, s.139-144.

REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH DRUGIEGO RZĘDU

$\mathbf{A}_2^{(5)} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & & \\ & c & \\ & & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$	
$\mathbf{A}_2^{(6)} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & a \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 & & \\ & s_1 & \\ & & c-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$	
$\mathbf{A}_2^{(7)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(7)} = \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b-a & & \\ & a+b & \\ & & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$	
$\mathbf{A}_2^{(8)} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2\times1}^{(8)} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & & \\ & -b & \\ & & b-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times1}$	

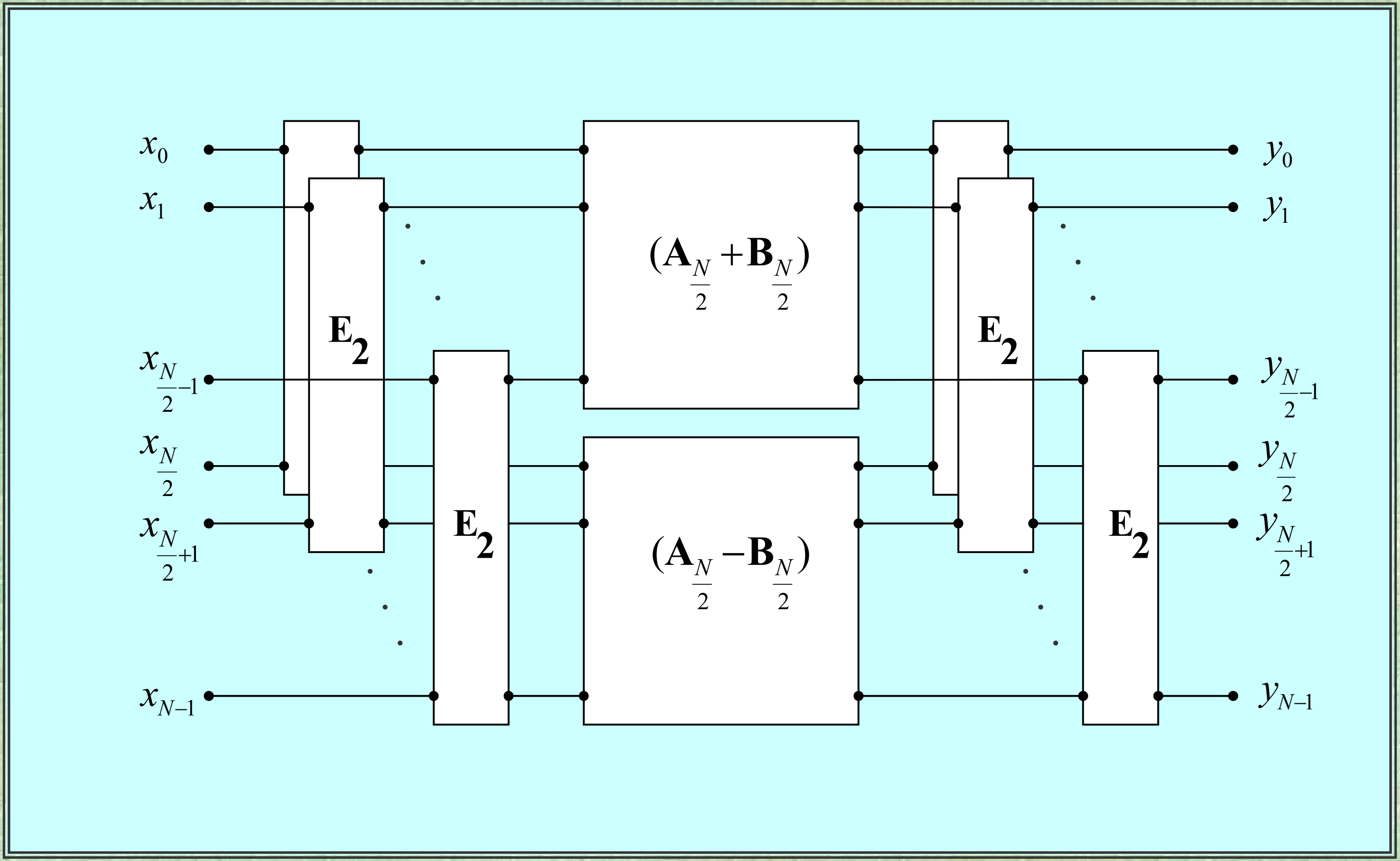
REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH *N*-TEGO RZĘDU*

Graficzna reprezentacja mnożenia wektora przez dowolną macierz N-go rzedu



$$\mathbf{A}_N^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times 1}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & -\mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} + \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} - \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & -\mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

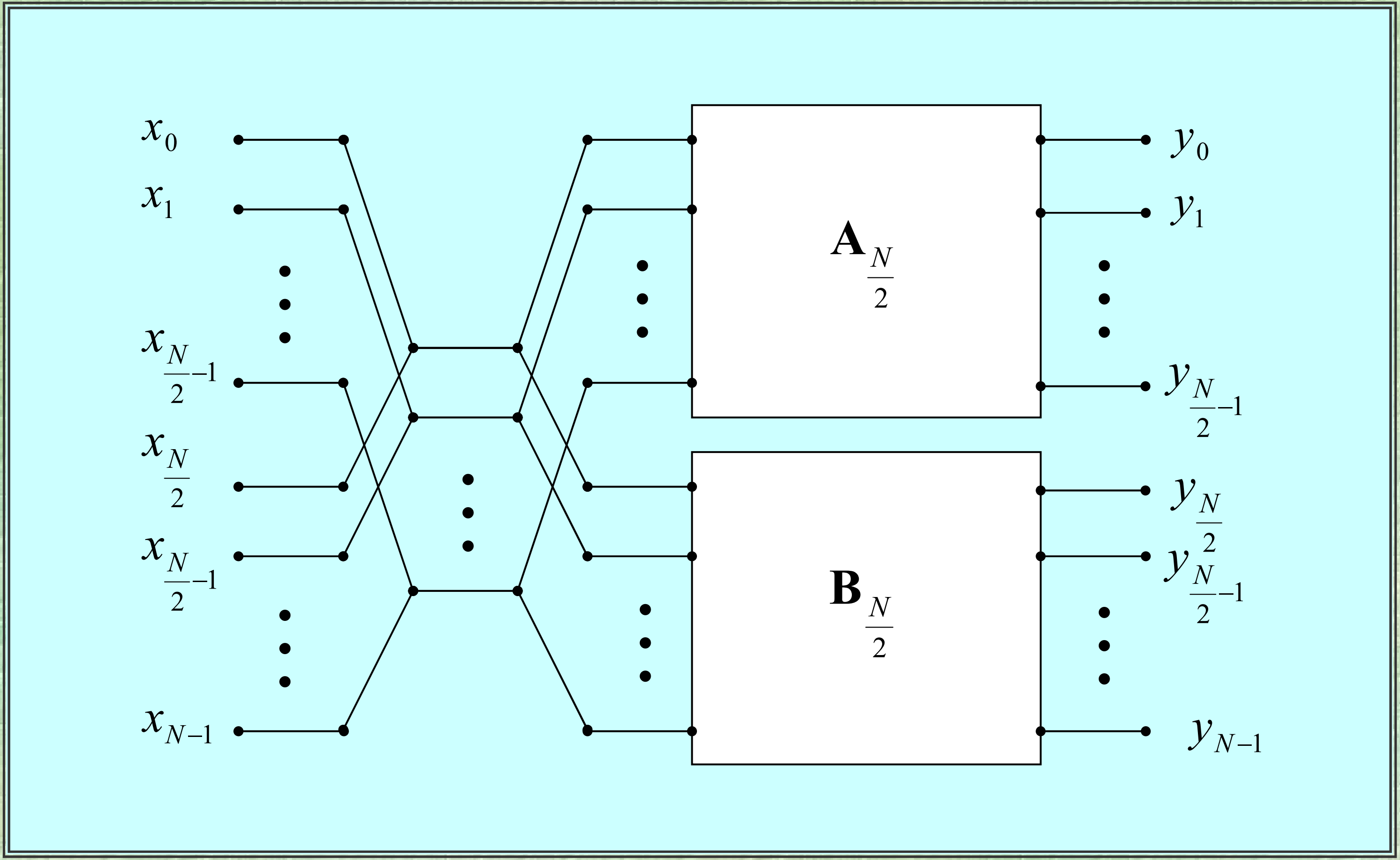


$\frac{N^2}{2}$

$\frac{N\cdot(N+6)}{2}$

$$\mathbf{A}_N^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times 1}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

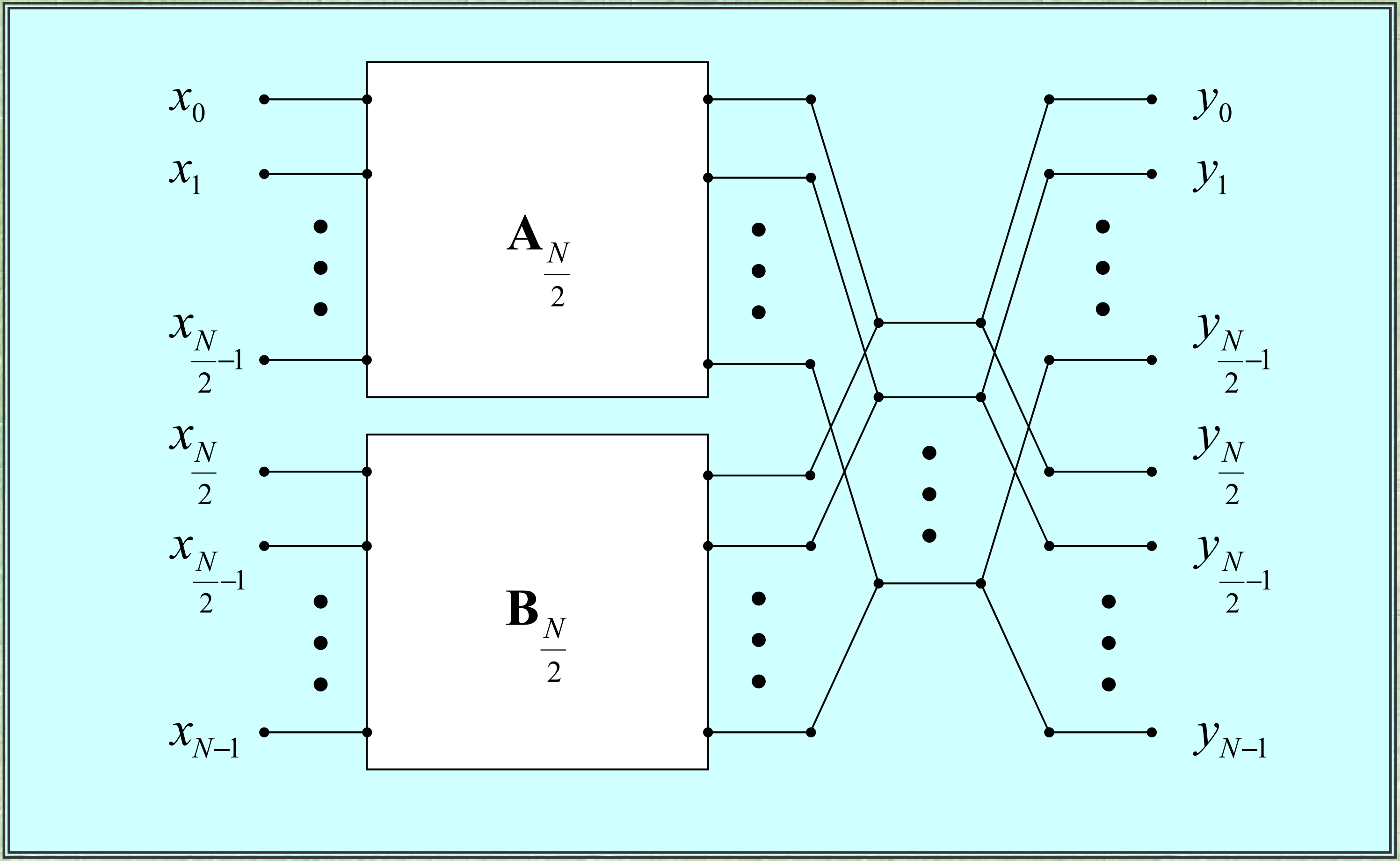


$$\frac{N^2}{2}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

$$\mathbf{A}_N^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times 1}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

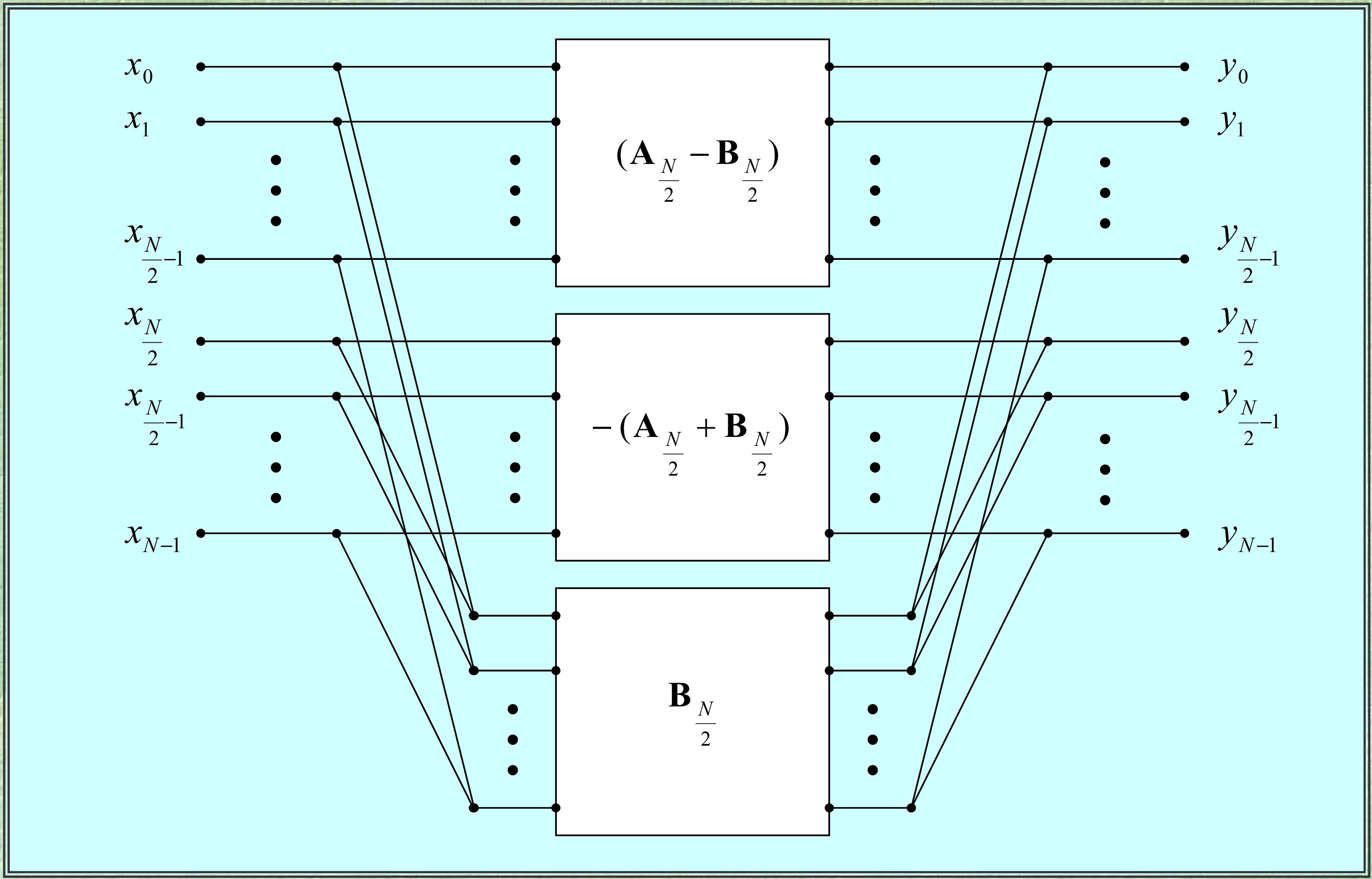


$\frac{N^2}{2}$

$\frac{N(N-1)}{2}$

$$\mathbf{A}^{(4)}_{N\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(4)}_{N\times 1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} & & 0 \\ & \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} & \\ 0 & & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

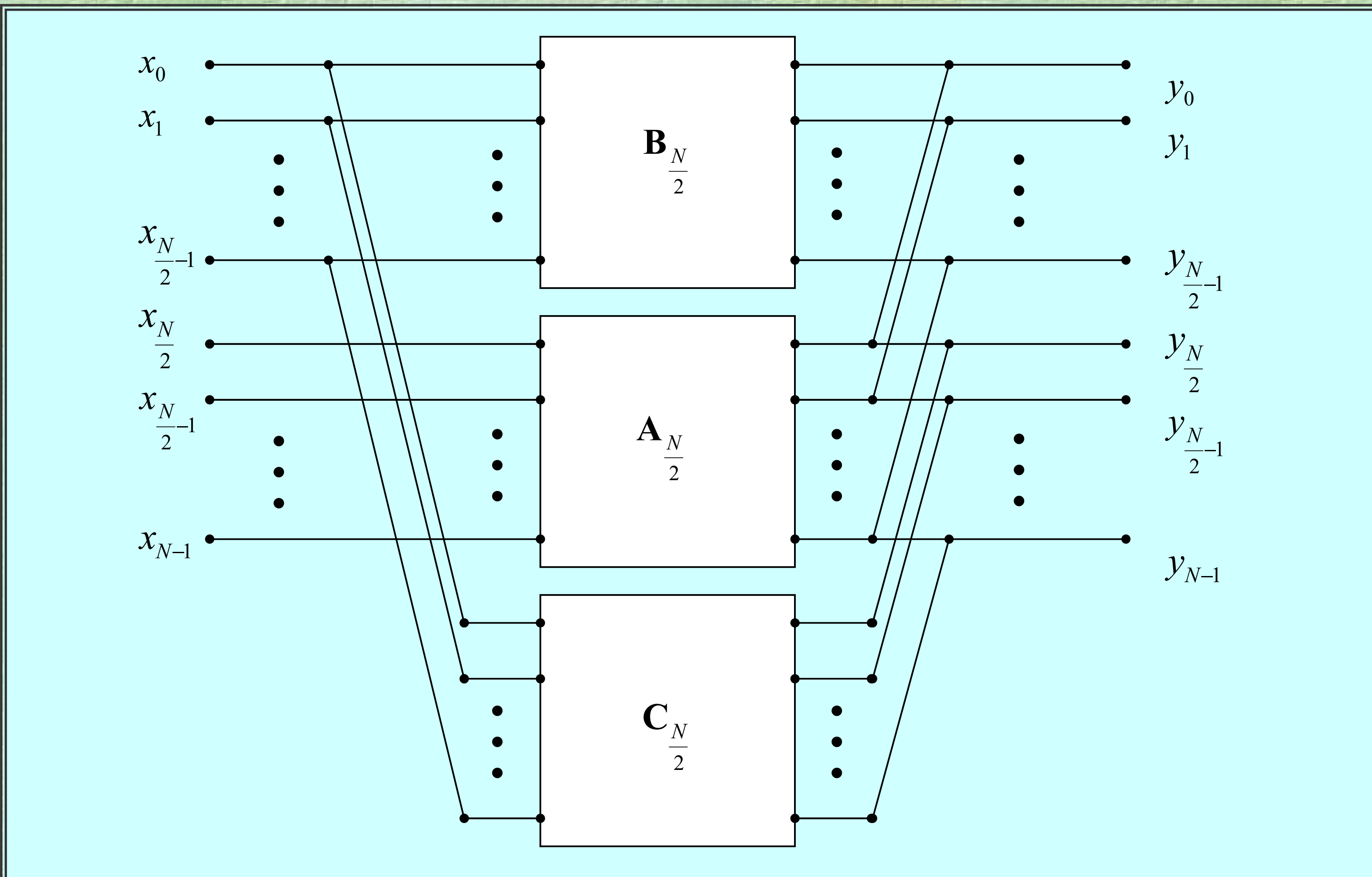


$\frac{3 \cdot N^2}{4}$

$\frac{3 \cdot N^2}{4}$

$$\mathbf{A}_{N\times 1}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times 1}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} & & 0 \\ & \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} & \\ 0 & & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

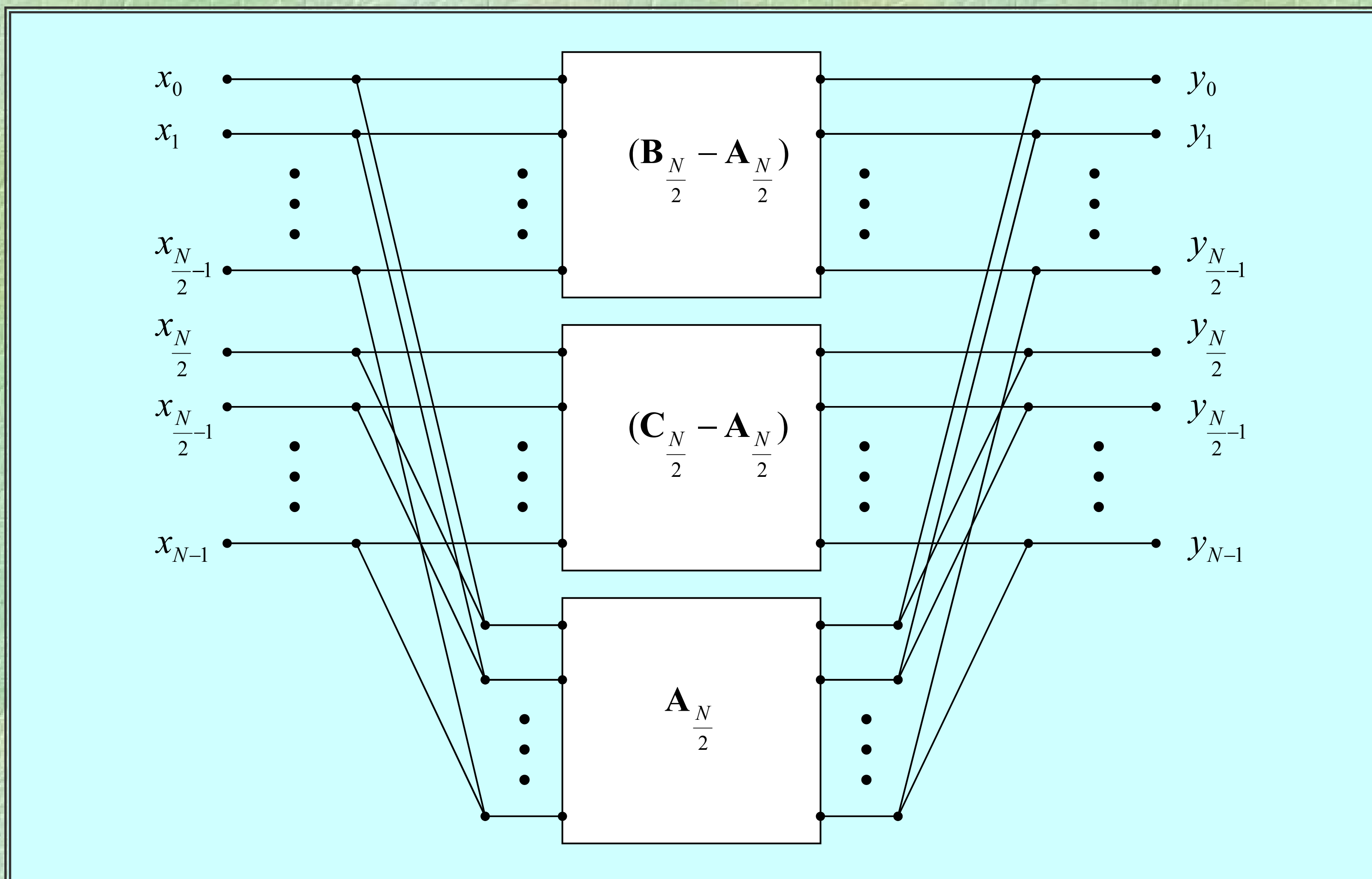


$$\frac{3\cdot N^2}{4}$$

$$\frac{N}{2}\left(\frac{3N}{2}-1\right)$$

$$\mathbf{A}_{N\times 1}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N\times 1}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & & 0 \\ & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \\ 0 & & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

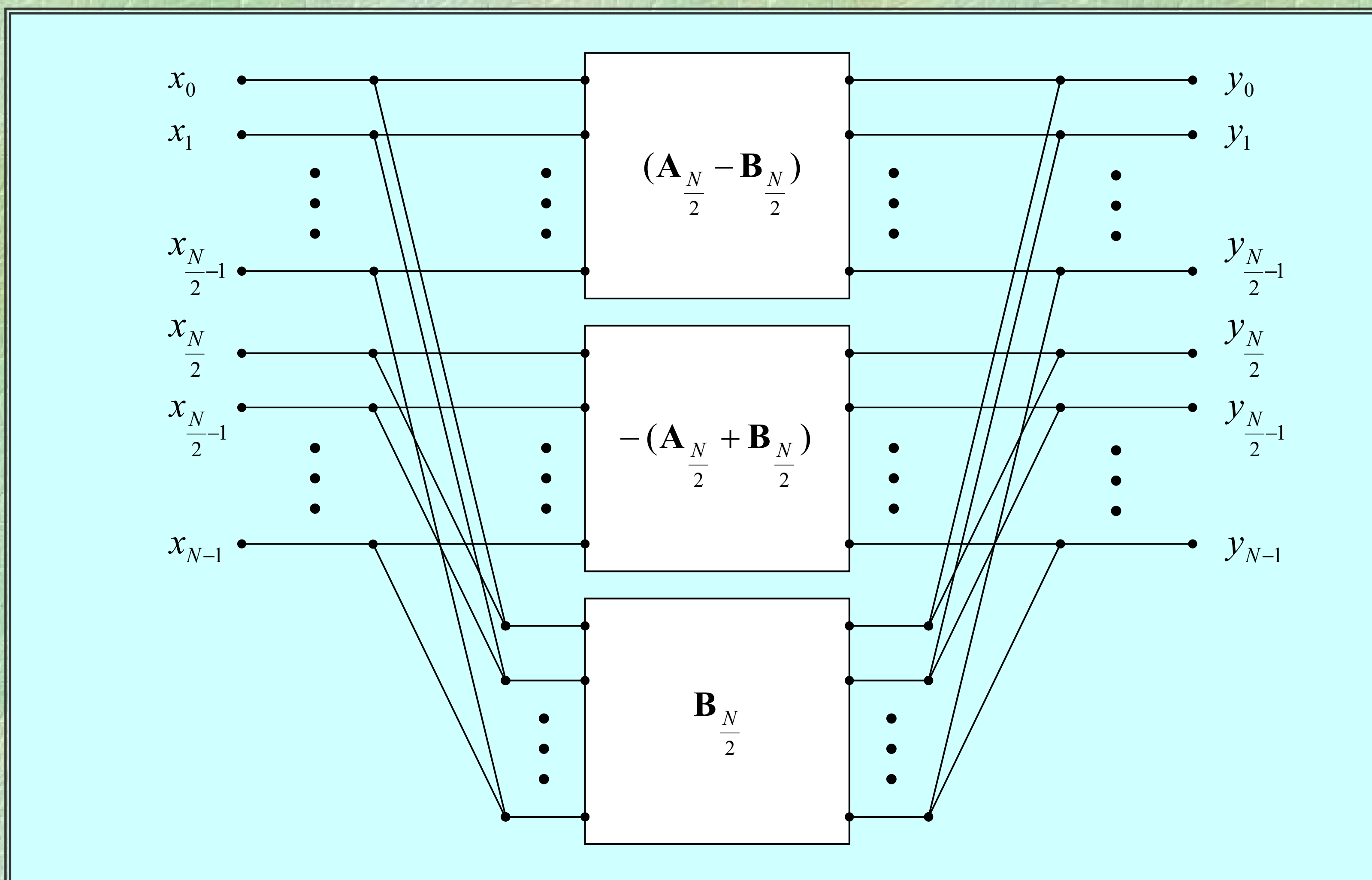


$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\mathbf{A}^{(7)}_{Nx1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(7)}_{N\times 1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} - \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} & & 0 \\ & -\mathrm{A}_{\frac{N}{2}} - \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} & \\ 0 & & \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N\times 1}$$

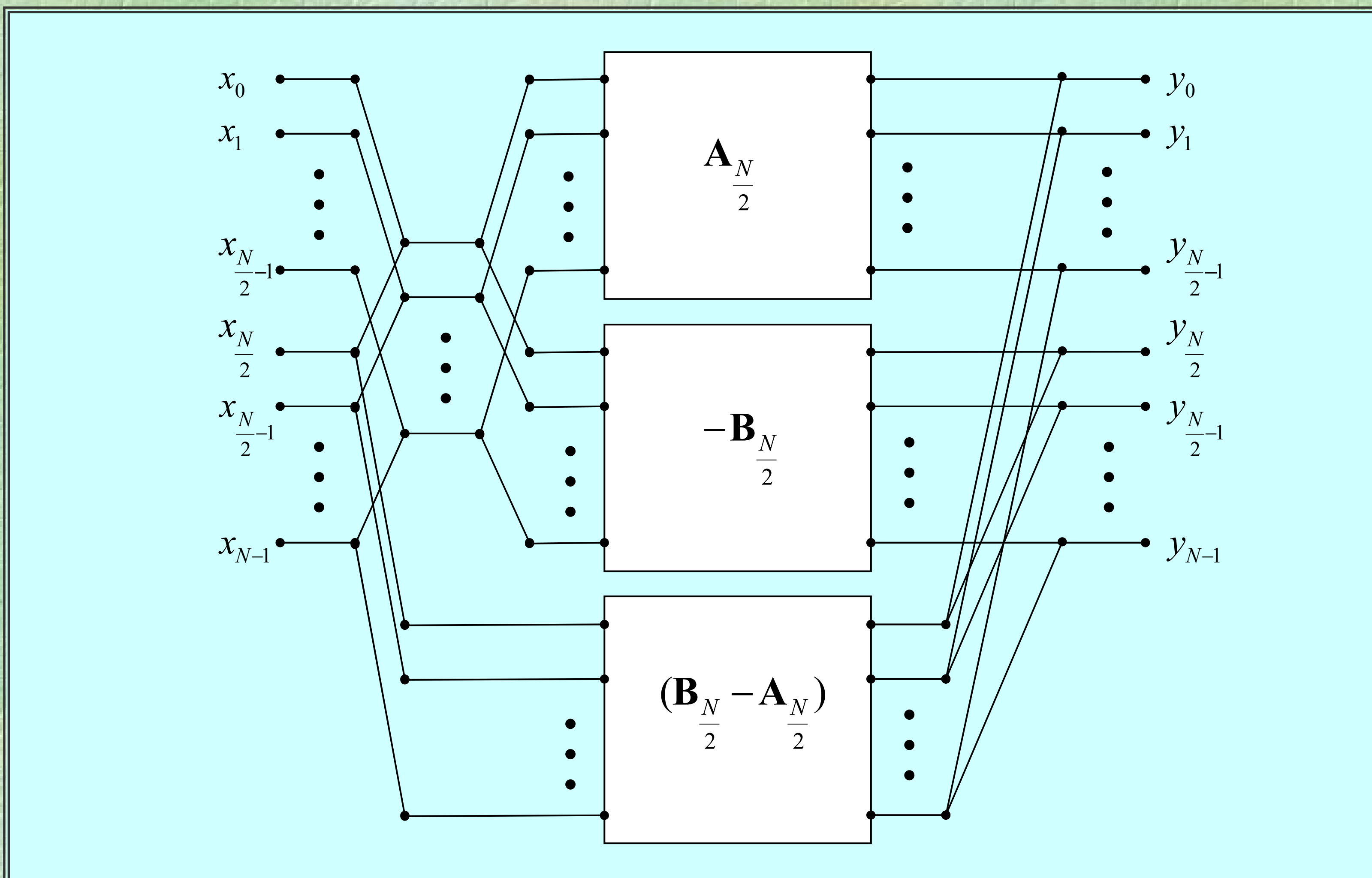


$\frac{3\cdot N^2}{4}$

$\frac{3\cdot N^2}{4}$

$$\mathbf{A}^{(8)}_{Nx1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ -\mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(8)}_{N\times 1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} & & 0 \\ & -\mathrm{B}_{\frac{N}{2}} & \\ 0 & & \mathrm{B}_{\frac{N}{2}} - \mathrm{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathrm{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2\times 1}$$



$\frac{3 \cdot N^2}{4}$

$\frac{3 \cdot N^2}{4}$