

Cyfrowa obróbka sygnałów

Elementy rachunku macierzowego



wykład No 5

Elementy algebry macierzy



Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów



Filtracja

Korelacja

Transformata
kosinusowa

Transformata
Fouriera

Splot liniowy

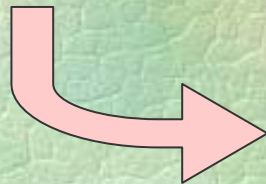
Splot cykliczny

Transformata
falkowa

inne...



$$Y = M \cdot X$$

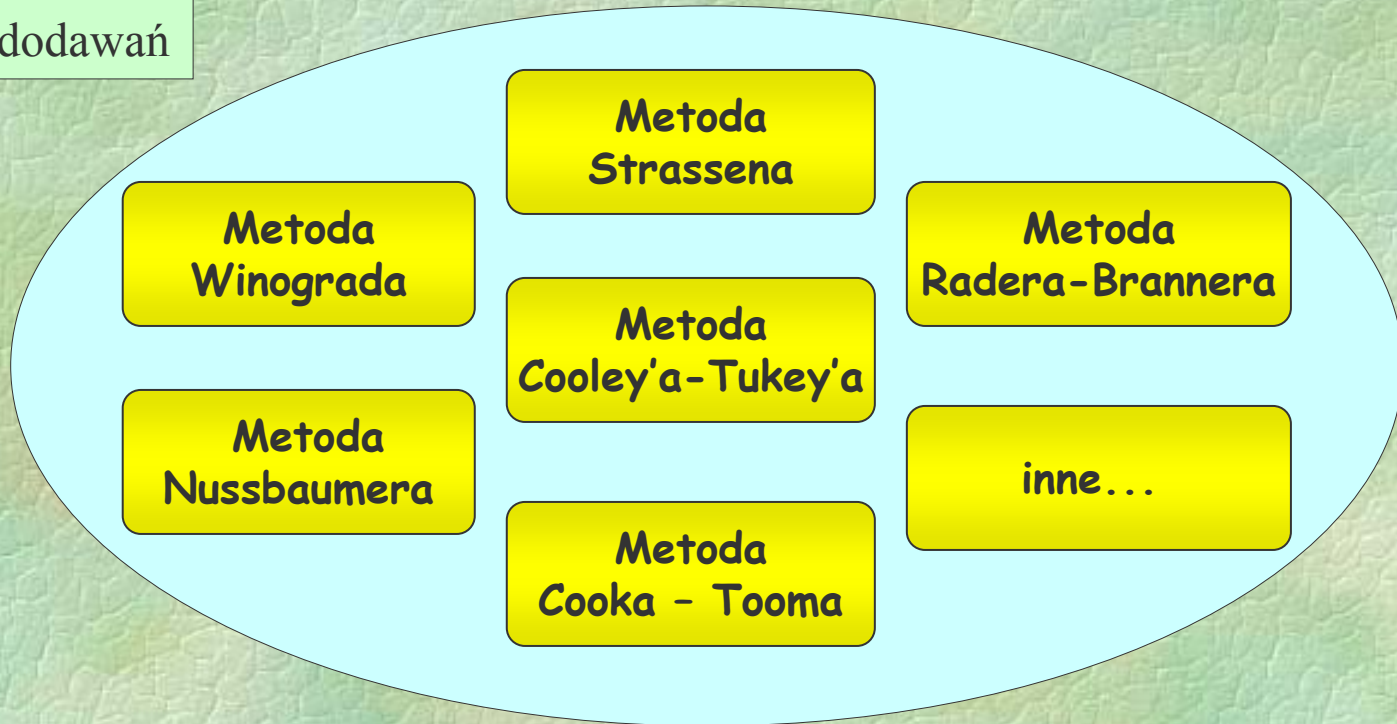


$$Y = M \cdot X$$

N^2 mnożeń

$N(N-1)$ dodawań

Algorytmy redukujące liczbę operacji arytmetycznych w zadaniach CPS



Teoria wielomianów

Chińskie twierdzenie o resztach

Charakterystyczne cechy funkcji bazowych

Wektor. Iloczyn skalarny

$$\mathbf{A}_{N \times 1} = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{X}_{N \times 1} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x_i$$

$$y = [\mathbf{A}_{N \times 1}]^T \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

Wektor. Iloczyn Hadamarda

$$y = \mathbf{A}_{N \times 1} \blacksquare \mathbf{X}_{N \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \cdot x_0 \\ a_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \cdot x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \blacksquare \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Zwektoryzowany iloczyn Hadamarda

" \circ " – operacja „zwektoryzowanego iloczynu Hadamarda” - została wprowadzona dla wygody opisu procedury jednoczesnego mnożenia wybranych elementów wektora - będzie przekształcać pewien wektor danych \mathbf{X}_{N-1} o wymiarze $N \times 1$ w wektor wyjściowy \mathbf{Y}_{M-1} o wymiarze $M \times 1$ w następujący sposób:

$$\mathbf{Y}_{M \times 1} = \mathbf{B}_{M \times N} \circ \mathbf{X}_{N \times 1}$$

$$\mathbf{B}_{M \times N} = \left\| b_{m,n} \right\|, \quad m = \overline{0, M-1}, \quad n = \overline{0, N-1}$$

- macierz-maski, składająca się z zer i jedynek, a elementy są wyznaczone według reguły:

$$y_i = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} b_{m,n} x_n, & \text{dla } \sum_{n=0}^{N-1} b_{m,n} = 1 \\ \prod_{n=0}^{N-1} b_{m,n} x_n, & \text{dla } \sum_{n=0}^{N-1} b_{m,n} > 1 \end{cases} \quad \forall i = \overline{0, M-1}$$

$$\prod_{n=0}^{N-1}$$

- symbol iloczynu ciągu liczb numerowanych według n .

Zwektoryzowany iloczyn Hadamarda

Macierz **B**
maskowania
mnożeń

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 x_1 \\ x_2 x_3 \\ x_4 x_5 \\ x_6 x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Zwektoryzowany iloczyn Hadamarda

Macierz **B**
maskowania
mnożeń

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 x_4 \\ x_1 x_5 \\ x_2 x_6 \\ x_3 x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Macierz oraz jej transpozycja

$$\mathbf{A}_{N \times M} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}_{N \times M}]^T = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{N-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Macierz oraz jej transpozycja

$$\mathbf{A}_{N \times M} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}_{N \times M}]^T = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{N-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Macierz oraz jej transpozycja

$$\mathbf{A}_{N \times M} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}_{N \times M}]^T = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{N-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna

$$\mathbf{D}_N = \text{diag}(d_0, d_1, \dots, d_{N-1}) = \begin{bmatrix} d_0 & & & \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{R \times F} = \text{quasidiag}(\mathbf{D}_{K \times L}, \mathbf{D}_{M \times N}, \dots, \mathbf{D}_{S \times P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{K \times L} & & & \\ & \mathbf{D}_{M \times N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{D}_{S \times P} \end{bmatrix}$$

\mathbf{I}_N - macierz jednostkowa o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu,

$$\mathbf{I}_8 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{e}_{1 \times N}^{(n)}$ - n -ty wiersz macierzy jednostkowej rzędu N ;

$$\mathbf{e}_{1 \times 8}^{(3)} = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mathbf{I}_N^{(\alpha \rightarrow)}$$

$$\mathbf{I}_N^{(\leftarrow \alpha)}$$

- macierze jednostkowe rzędu , których kolumny są cyklicznie przesunięte względem pierwotnej postaci o zdefiniowaną za pomocą górnego indeksu liczbę pozycji w kierunku określonym strzałką;

$$\mathbf{I}_8^{(2 \rightarrow)} = \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_8^{(\leftarrow 2)} = \begin{bmatrix} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_8^{(2\rightarrow)} = \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_8^{(\leftarrow 2)} = \begin{bmatrix} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}_{N \times M}$ - macierz zerowa o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu,

$$\mathbf{0}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{1}_{N \times L}$ - macierz składająca się z jedynek o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu;

$$\mathbf{1}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Suma prosta (tensorowa)

 \oplus $N-1$ \oplus $i=0$

- są symbolami sumy prostej (tensorowej) dwóch lub wielu macierzy odpowiednio,

$$\mathbf{A}_{N \times M} \oplus \mathbf{B}_{K \times L} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{N \times M} & \\ \hline & \mathbf{B}_{K \times L} \end{array} \right],$$

$$\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_{L \times M}^{(i)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{L \times M}^{(0)} & & & \\ \hline & \mathbf{A}_{L \times M}^{(1)} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \mathbf{A}_{L \times M}^{(N-1)} \end{array} \right]$$

Iloczyn Kroneckera (tensorowy)

 \otimes $N-1$ \otimes $i=0$

- są symbolami iloczynu Kroneckera dwóch lub wielu macierzy odpowiednio,

$$\mathbf{A}_{N \times M} \otimes \mathbf{B}_{K \times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \mathbf{B}_{K \times L} & a_{0,1} \mathbf{B}_{K \times L} & \cdots & a_{0,N-1} \mathbf{B}_{K \times L} \\ a_{1,0} \mathbf{B}_{K \times L} & a_{1,1} \mathbf{B}_{K \times L} & \cdots & a_{1,N-1} \mathbf{B}_{K \times L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} \mathbf{B}_{K \times L} & a_{N-1,1} \mathbf{B}_{K \times L} & \cdots & a_{N-1,N-1} \mathbf{B}_{K \times L} \end{bmatrix}$$

Konkatenacja pozioma

■ | ■

$N - 1$

■ | ■

$n = 0$

- symbole operacji odpowiednio poziomej konkatenacji dwóch lub wielu macierzy

$$\mathbf{A}_{N \times L} \quad \mathbf{B}_{N \times M} = [\mathbf{A}_{N \times L}, \mathbf{B}_{N \times M}]$$

$$\mathbf{Y}_{N \times \sum_{j=0}^{L-1} K_j} = \mathbf{A}_{N \times K_j}^{(i)} = [\mathbf{A}_{N \times K_0}^{(0)}, \mathbf{A}_{N \times K_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}_{N \times K_{L-1}}^{(N-1)}]$$

Konkatenacja pionowa



$N-1$



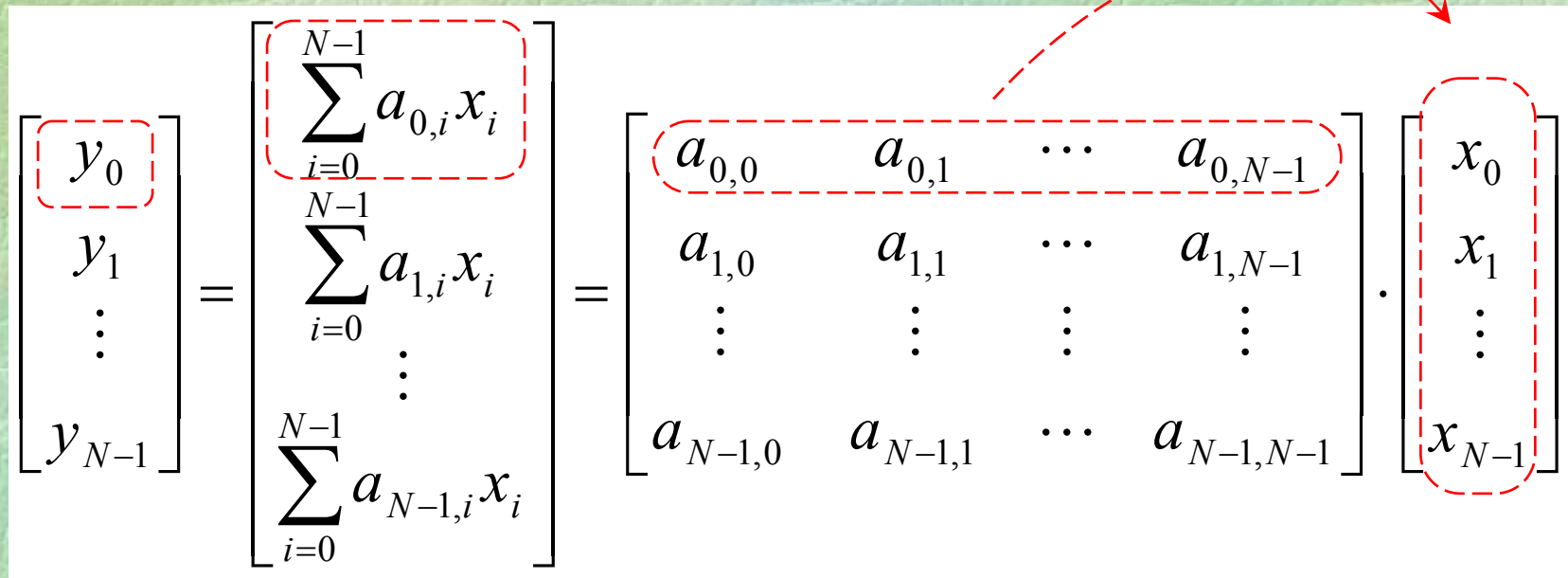
$i=0$

- symbole operacji odpowiednio pionowej concatenacji dwóch lub wielu macierzy

$$\mathbf{A}_{N \times L} \begin{array}{c} \blacksquare \\ \hline \blacksquare \end{array} \mathbf{B}_{M \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{N \times L} \\ \mathbf{B}_{M \times L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{\sum_{j=0}^{L-1} K_j \times M} = \begin{array}{c} N-1 \\ \blacksquare \\ \hline \blacksquare \\ i=0 \end{array} \mathbf{A}_{K_j \times M}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{K_0 \times M}^{(i)} \\ \mathbf{A}_{K_1 \times M}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{K_{L-1} \times M}^{(N-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy I

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} a_{0,i} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1,i} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$


Iloczyn wektorowo-macierzowy I

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} a_{0,i} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1,i} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy I

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} a_{0,i} x_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1,i} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy II

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{N-1,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{0,N-1} \\ a_{1,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot x_{N-1}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy II

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{N-1,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{0,N-1} \\ a_{1,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot x_{N-1}$$

Iloczyn wektorowo-macierzowy II

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{N-1,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{0,N-1} \\ a_{1,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot x_{N-1}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{0,i} x_{i,(L-1)} \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} x_{i,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,0} & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} a_{(N-1),i} x_{i,(L-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(0)} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times 1}^{(0)}$$

$$\mathbf{X}_{M \times 1}^{(0)} = [x_{0,0}, x_{1,0}, \dots, x_{(M-1),0}]^T$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(1)} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times 1}^{(1)}$$

$$\mathbf{X}_{M \times 1}^{(1)} = [x_{0,1}, x_{1,1}, \dots, x_{(M-1),1}]^T$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(L-1)} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times 1}^{(L-1)}$$

$$\mathbf{X}_{M \times 1}^{(L-1)} = [x_{0,(L-1)}, x_{1,(L-1)}, \dots, x_{(M-1),(L-1)}]^T$$

Iloczyn macierzowy II

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times L}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,(L-1)} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{(N-1),0} & y_{(N-1),1} & \cdots & y_{(N-1),(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,(M-1)} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1),0} & a_{(N-1),1} & \cdots & a_{(N-1),(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,(L-1)} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(M-1),0} & x_{(M-1),1} & \cdots & x_{(M-1),(L-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times L} = \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{Y}_{N \times 1}^{(i)} = \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{A}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times 1}^{(i)})$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(i)} = [y_{0,i}, y_{1,i}, \dots, y_{(N-1),i}]^T$$

$$\mathbf{X}_{M \times 1}^{(i)} = [x_{0,i}, x_{1,i}, \dots, x_{(M-1),i}]^T$$

Metoda Strassen

Strassen's Approach

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

- $p_1 = a(f - h)$
- $p_2 = (a+b)h$
- $p_3 = (c+d)e$
- $p_4 = d(g-e)$
- $p_5 = (a+d)(e + h)$
- $p_6 = (b-d)(g+h)$
- $p_7 = (a-c)(e+f)$
- $r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6$
- $s = p_1 + p_2$
- $t = p_3 + p_4$
- $u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7$
- 7 multiplications
- 18 additions

Metoda Winograda

Wzór Winograda do
wyznaczania iloczynu
skalarnego

$$a_0x_0 + a_1x_1 = (a_0 + x_1)(a_1 + x_0) - a_0a_1 - x_0x_1$$

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (a_0 + x_1)(a_1 + x_0) + (a_2 + x_3)(a_3 + x_2) - a_0a_1 - a_2a_3 - x_0x_1 - x_2x_3$$

Metoda Winograda

Zależy tylko od i , więc
nie wymaga obliczeń
dla każdego j

$$y_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} \cdot x_{k,j} = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} [(a_{i,2k} + x_{2k+1,j}) \cdot (a_{i,2k+1} + x_{2k,i})] - \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_{i,2k} \cdot a_{i,2k+1} - \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} x_{2k,j} \cdot x_{2k+1,j}$$

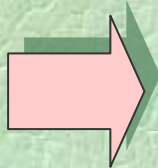
Zależy tylko od j , więc
nie wymaga obliczeń
dla każdego i

$$N^3$$



$$\frac{N^3}{2} + N^2$$

$$N^2 \cdot (N - 1)$$



$$N^2 \cdot (N - 1) + N \cdot (N - 1)$$

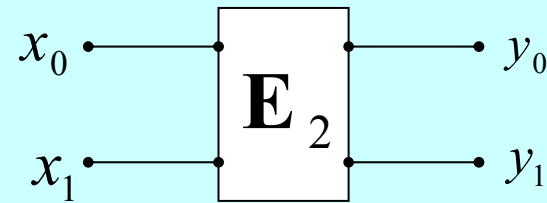
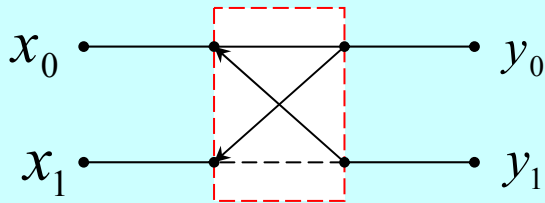
Metoda Winograda

<i>Rozmiar macierzy</i>	Metoda klasyczna		Metoda Winograda	
	<i>Liczba mnożeń</i>	<i>Liczba dodawań</i>	<i>Liczba mnożeń</i>	<i>Liczba dodawań</i>
2	8	4	8	6
4	64	48	48	60
8	512	448	320	504
16	4096	3840	2304	4080
32	32768	31744	17408	32736
64	262144	258048	135168	262080
128	2097152	2080768	1064960	2097024

**REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY
WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ
MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH
DRUGIEGO RZĘDU**

Macierz Hadamarda 2-go rzędu

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH DRUGIEGO RZĘDU*

$\mathbf{A}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} a+b & \\ & a-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	
$\mathbf{A}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(2)} = \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1] \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	
$\mathbf{A}_2^{(3)} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	
$\mathbf{A}_2^{(4)} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & \\ & a \\ & & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	

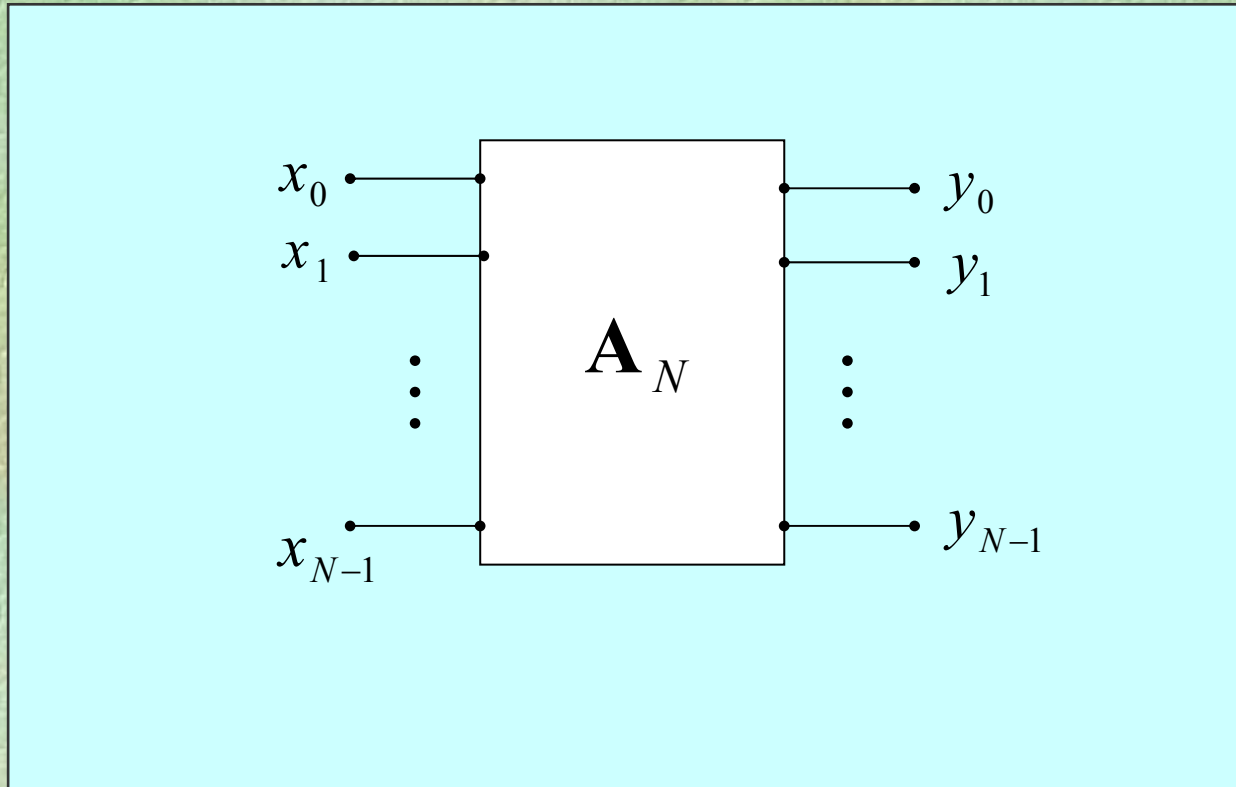
* *Alexandr Tariov, Marcin Adamski* „Redukcja liczby mnożeń przy wyznaczeniu iloczynów wektora przez macierze wartości stałych drugiego rzędu”. *Metody informatyki stosowanej. Roczniki informatyki stosowanej WIPS*, Nr 8, Szczecin, Informa, 2005, s.139-144.

REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH DRUGIEGO RZĘDU

$\mathbf{A}_2^{(5)} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & c \\ & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	
$\mathbf{A}_2^{(6)} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & a \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 & \\ & s_1 \\ & c-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	
$\mathbf{A}_2^{(7)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b-a & \\ & a+b \\ & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	
$\mathbf{A}_2^{(8)} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(8)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & -b \\ & b-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$	

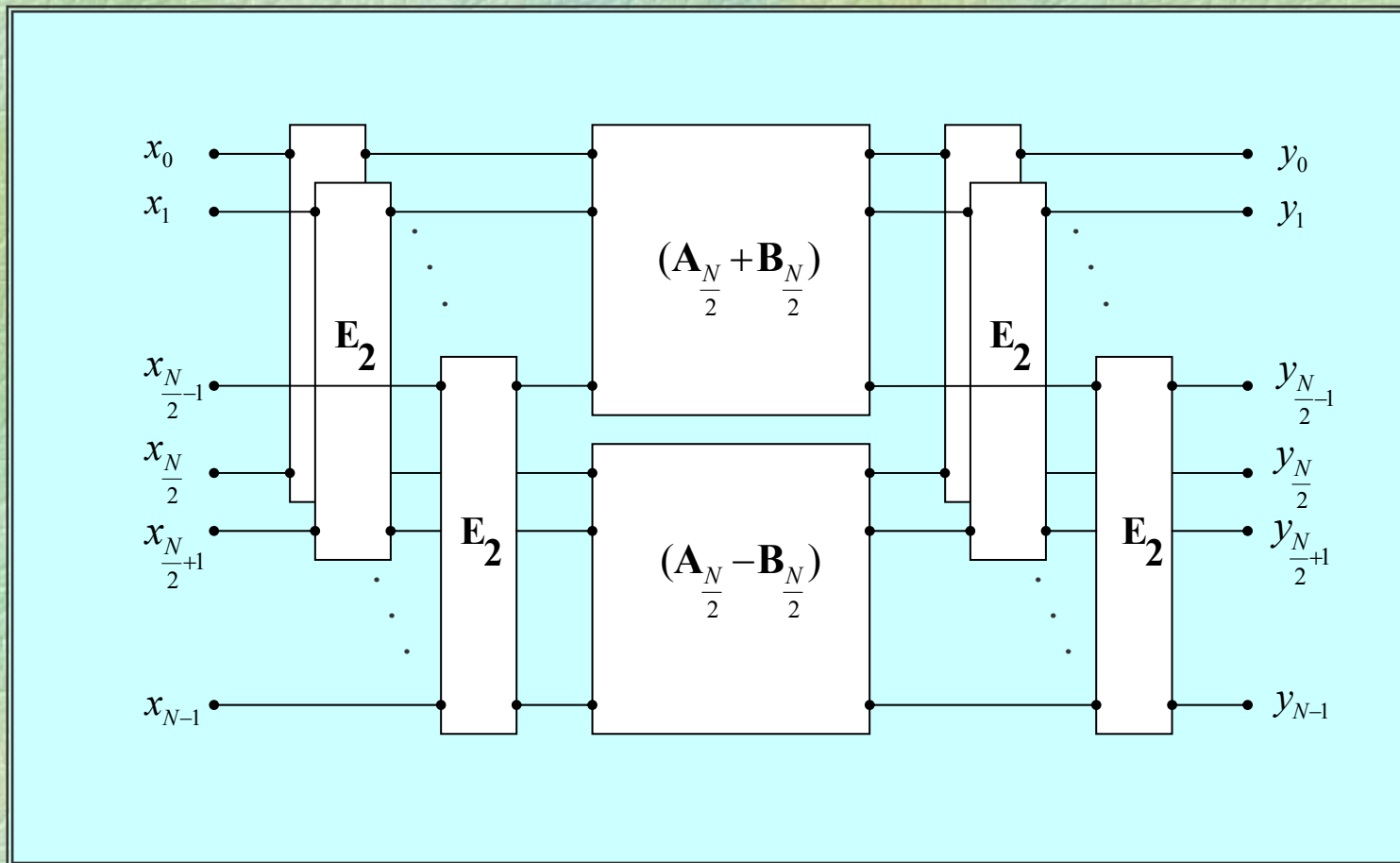
**REDUKCJA LICZBY MNOŻEŃ PRZY
WYZNACZENIU IŁOCZYNÓW WEKTORA PRZEZ
MACIERZE WARTOŚCI STAŁYCH
 N -TEGO RZĘDU***

Graficzna reprezentacja mnożenia wektora przez dowolną macierz N -go rzędu



$$\mathbf{A}_N^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} + \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

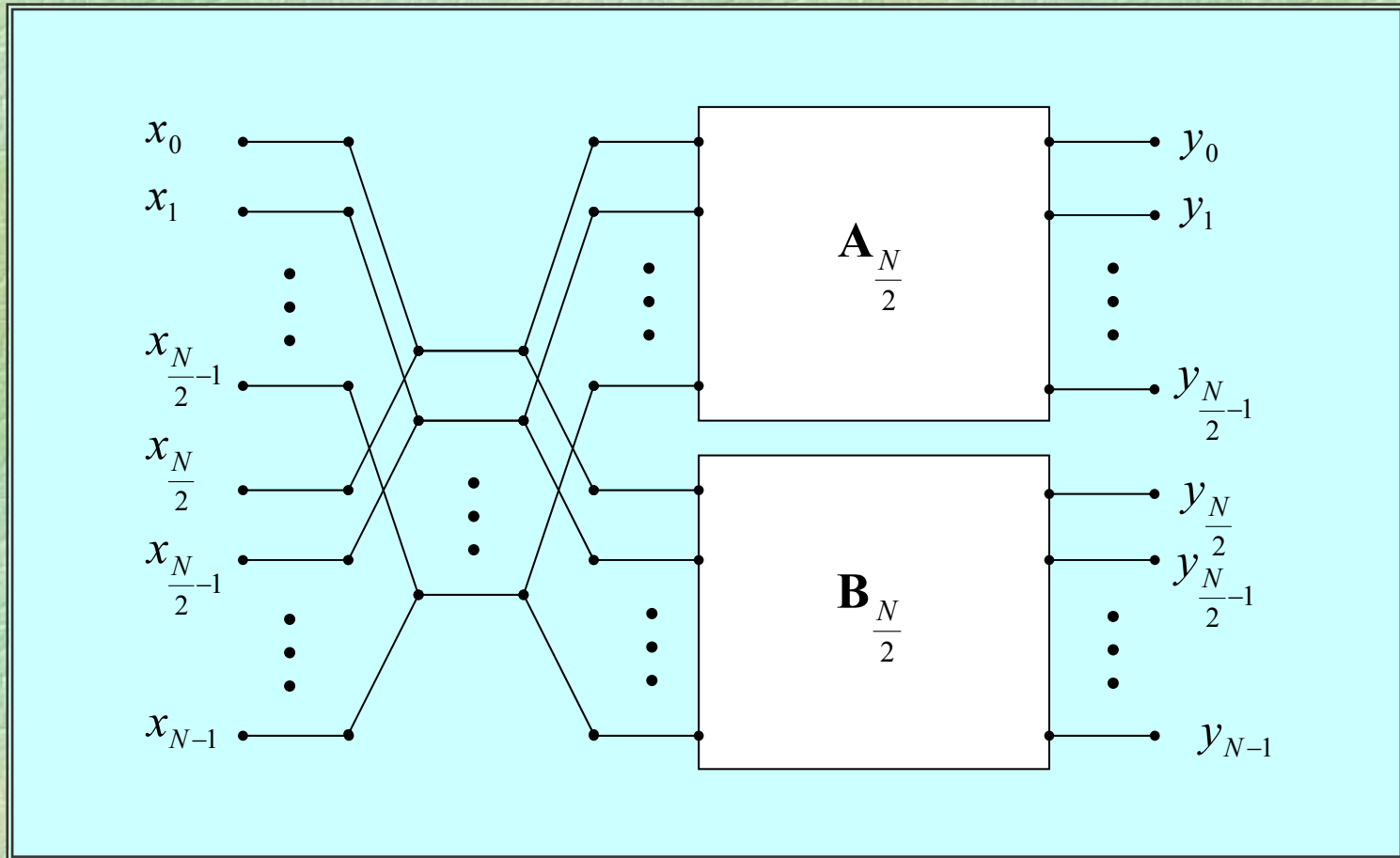


$$\frac{N^2}{2}$$

$$\frac{N \cdot (N+6)}{2}$$

$$\mathbf{A}_N^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \\ & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

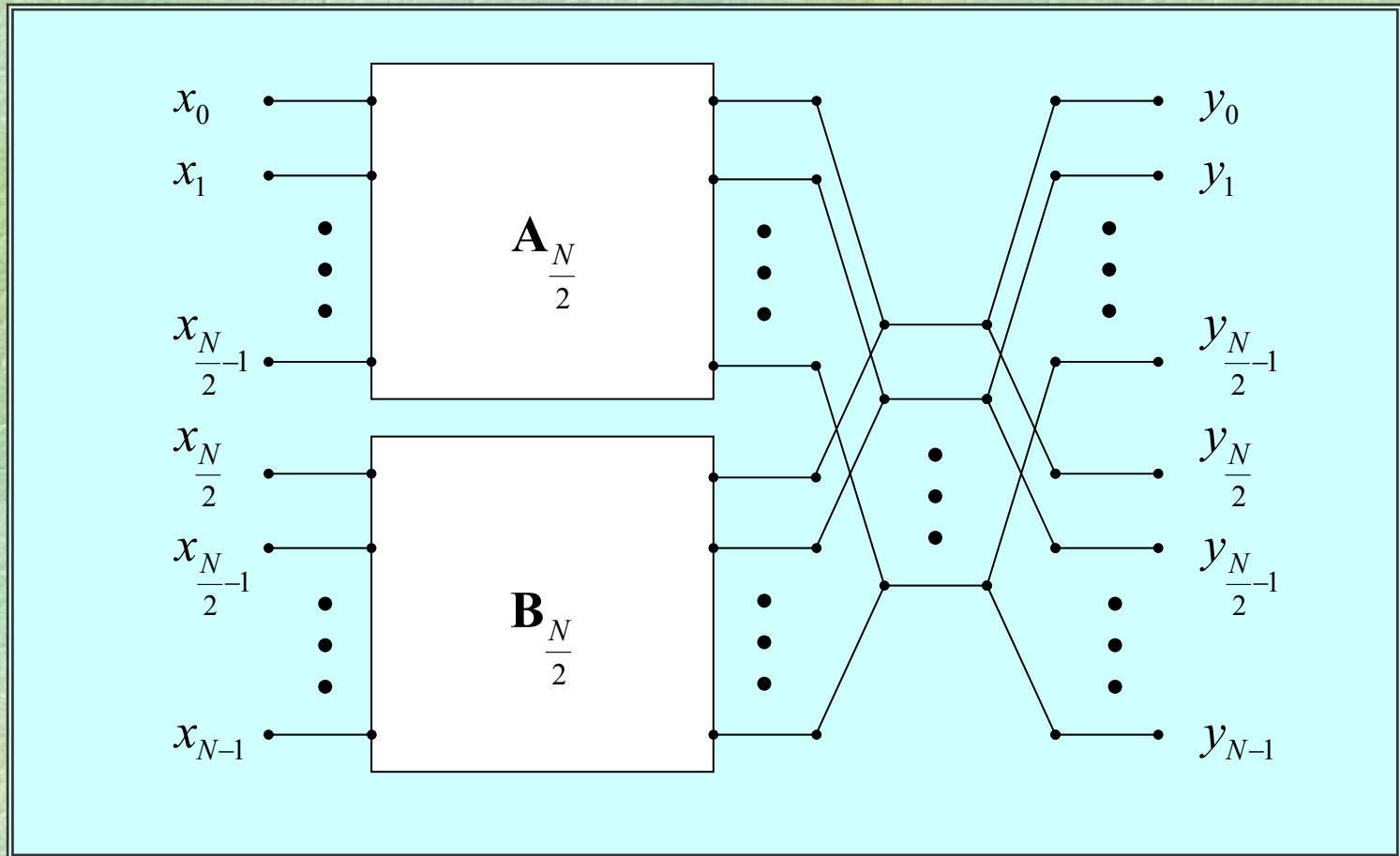


$$\frac{N^2}{2}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

$$\mathbf{A}_N^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

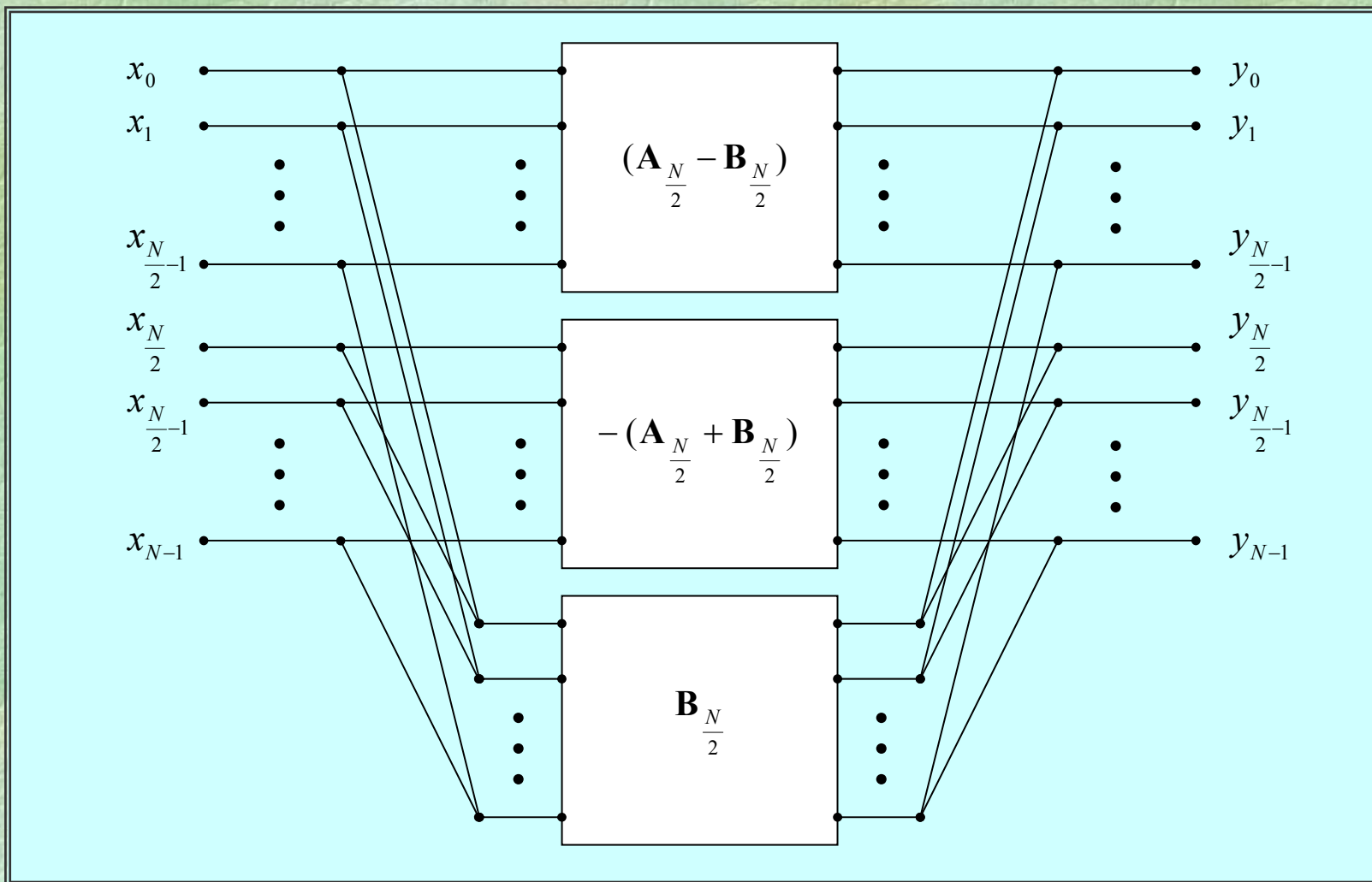


$$\frac{N^2}{2}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

$$\mathbf{A}_{N \times 1}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

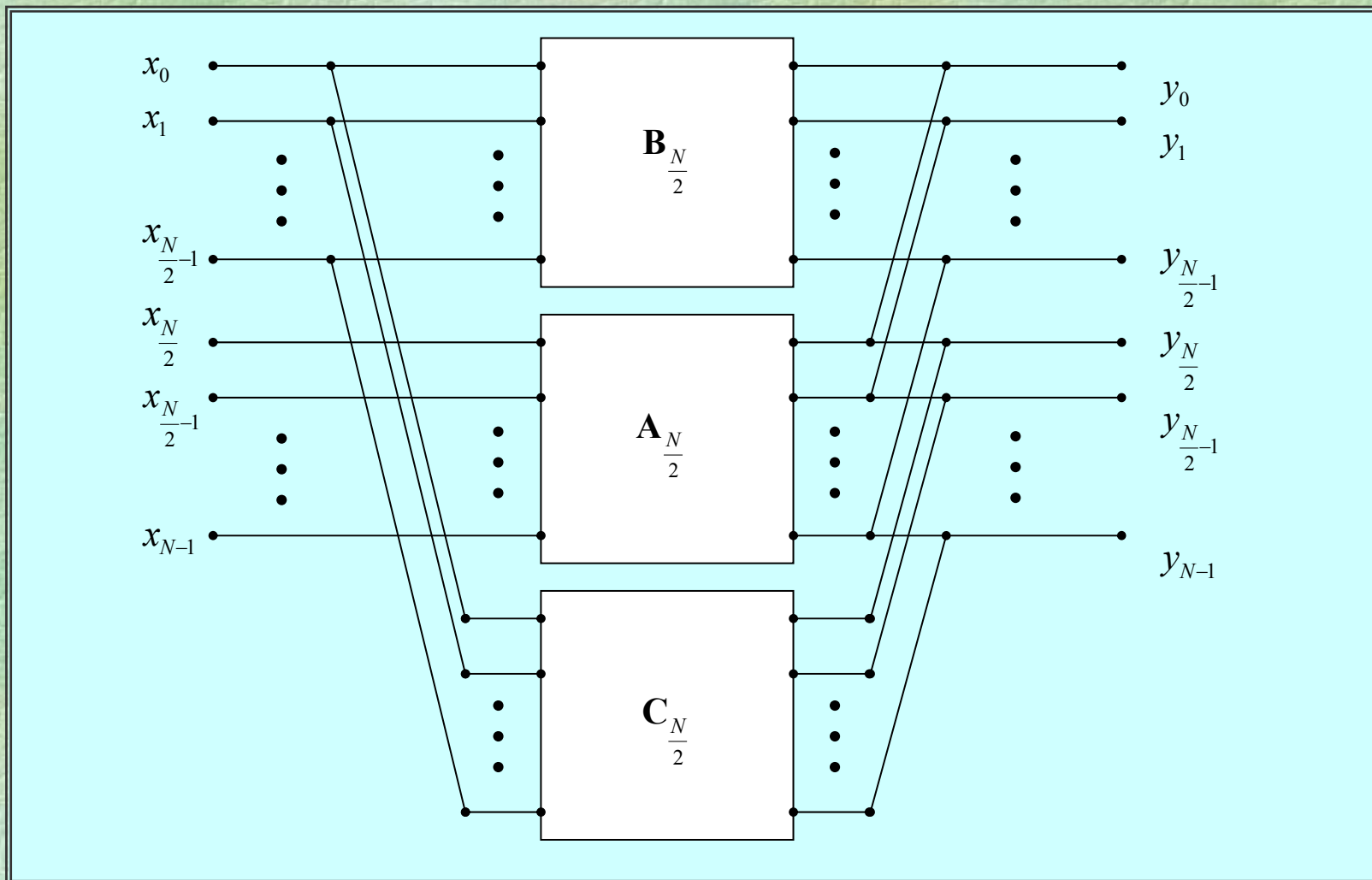


$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\mathbf{A}_{N \times 1}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

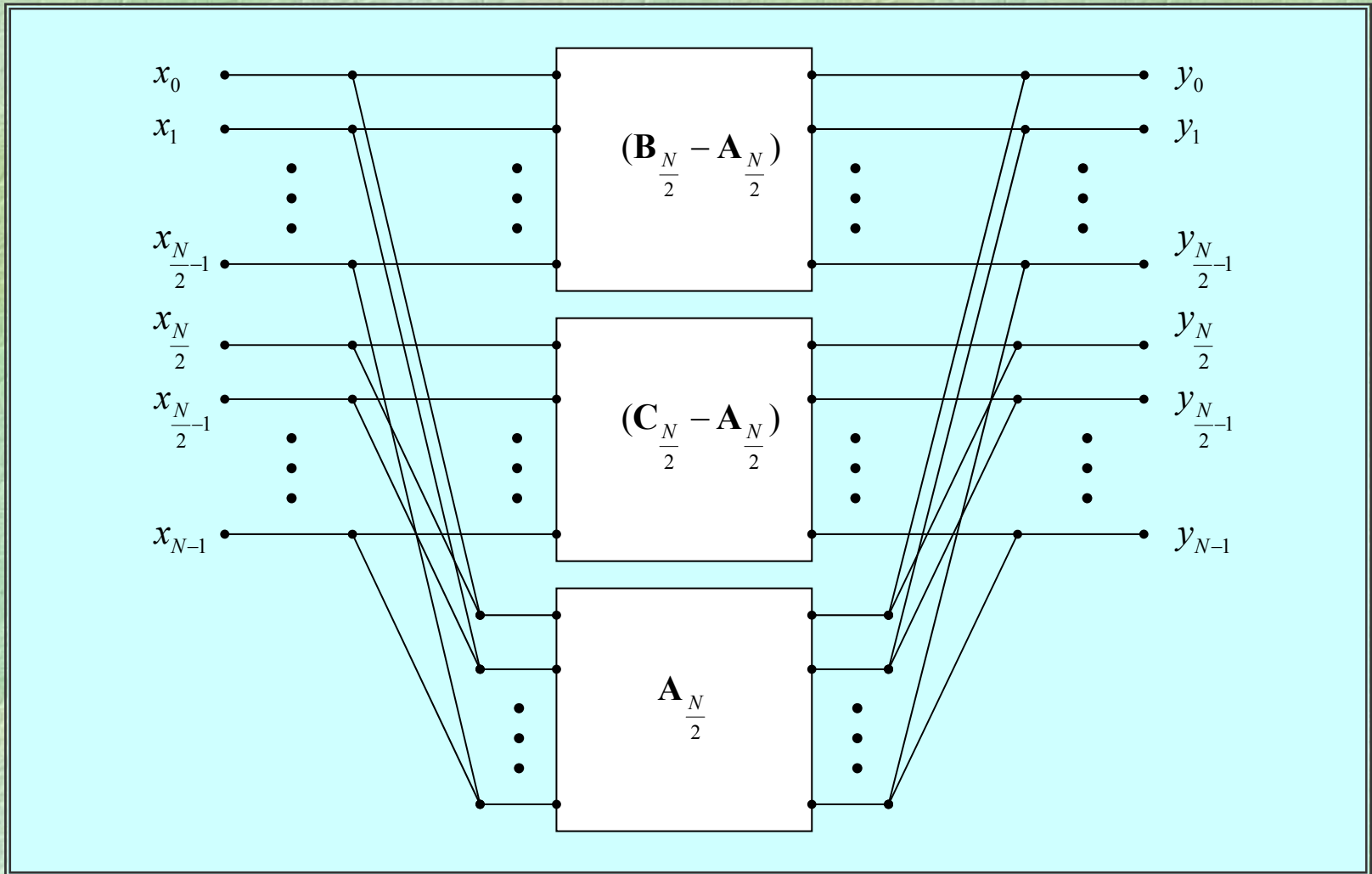


$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\frac{N}{2} \left(\frac{3N}{2} - 1 \right)$$

$$\mathbf{A}_{N \times 1}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathbf{C}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

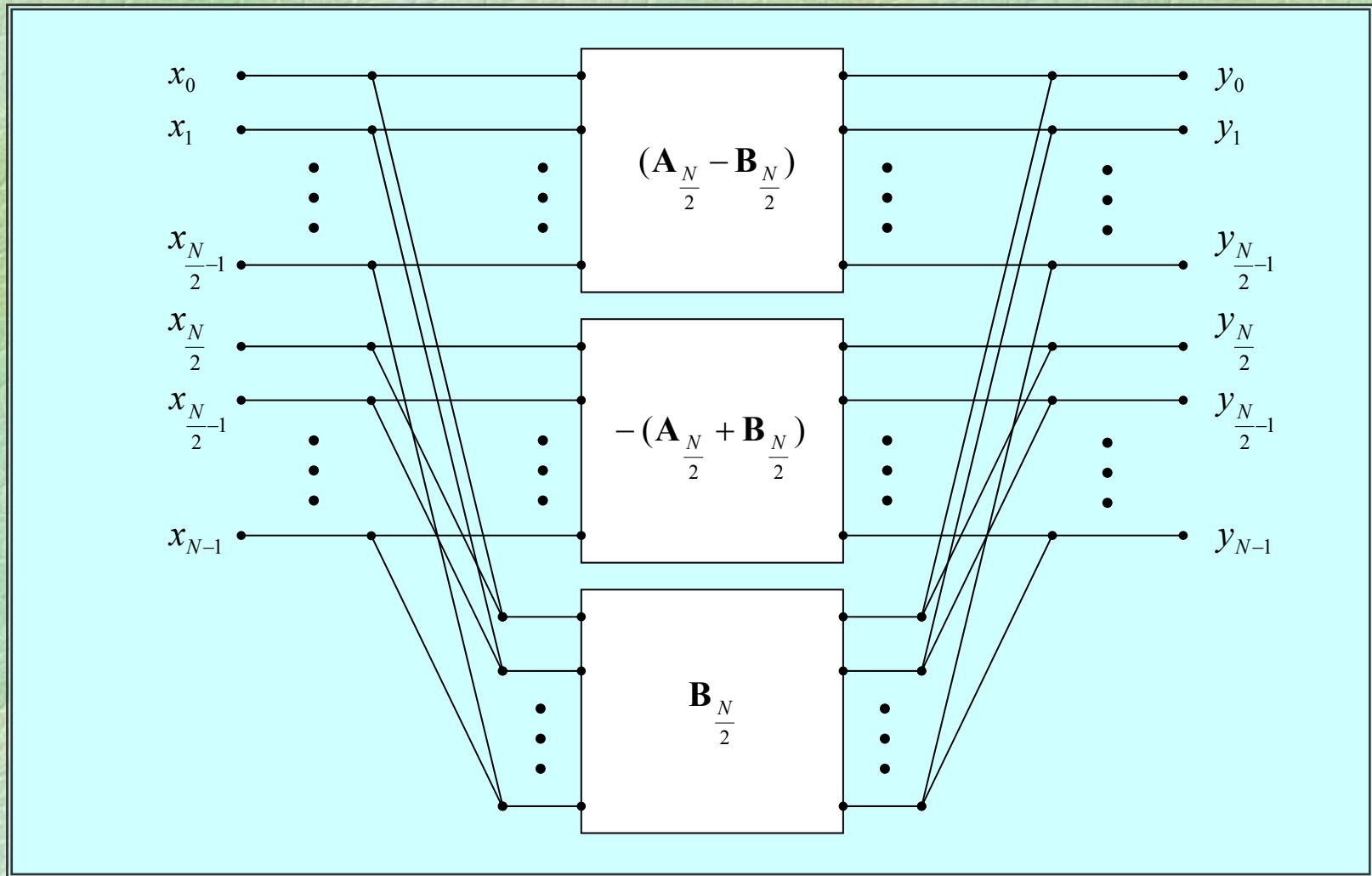


$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\mathbf{A}_{N \times 1}^{(7)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(7)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$

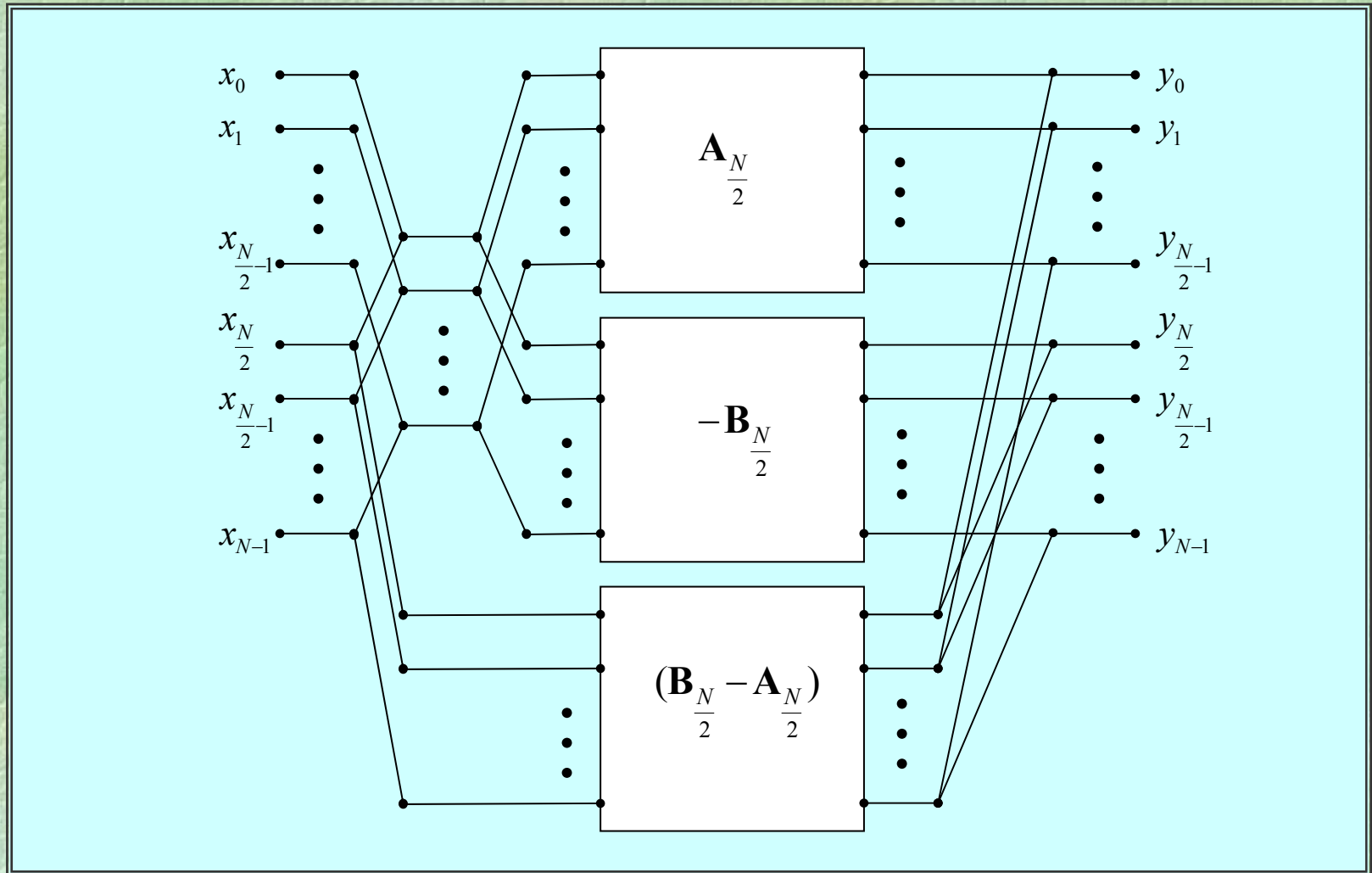


$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\mathbf{A}_{N \times 1}^{(8)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ -\mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{N \times 1}^{(8)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \\ & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} - \mathbf{A}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \\ 0 & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1}$$



$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$

$$\frac{3 \cdot N^2}{4}$$