

Systemy przetwarzania sygnałów

Przekształcanie sygnałów w dziedzinę częstotliwościową



wykład No 6

Reprezentacja sygnałów za pomocą szeregów funkcyjnych.

Sygnały z którymi mamy do czynienia w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów są przebiegami o bardzo złożonym kształcie.



Często celowym jest reprezentować takie przebiegi $x(n)$ w postaci liniowej kombinacji bardziej prostych przebiegów.



To wykonać można za pomocą doboru zestawu z góry określonych funkcji $b_0(n)$, $b_1(n)$, ..., $b_k(n)$, ... oraz pewnych współczynników liczbowych c_0 , c_1 , ..., c_k ,



Wtedy sygnał $x(n)$ zdefiniowany za pomocą N próbek z numerami $0, 1, \dots, N-1$ można przedstawić w postaci:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b_k(n) \quad (1)$$

$$c_k = E_k^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) b_k(n) \quad (2)$$



Tutaj $\{b_k(n)\}$ - całokształt **funkcji bazowych** zdefiniowanych na zbiorze od 0 do $N-1$ punktów;

$\{c_k\}$ - współczynniki rozkładu sygnału według bazy, nazywane **widmem** sygnału;

E_k - energia **k -tej** funkcji bazowej.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b_k(n) \quad (1)$$

$$c_k = E_k^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) b_k(n) \quad (2)$$

Ze wzorów (1) i (2) wynika, iż sygnał cyfrowy można zdefiniować za pomocą jego próbek w dyskretnych chwilach czasu lub za pomocą zbioru współczynników widmowych.

Wybór bazy określa się względami praktycznej lub matematycznej wygody.



Zazwyczaj w większości zadań CPS rozpatruje się sytuację gdy liczba funkcji bazowych jest skończona i dopasowana do rozmiaru sygnału N .



$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b_k(n)$$

(1)



W rozkładzie (1) konieczne jest żeby zbiór funkcji bazowych odpowiadał następującym warunkom:

1. Funkcje bazowe powinny być **liniowo niezależne**

$$a_0 b_0(n) + a_1 b_1(n) + \dots + a_{N-1} b_{N-1}(n) \neq 0$$

przy dowolnych wartościach współczynników a_i , oprócz przypadku, kiedy

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{N-1} = 0.$$

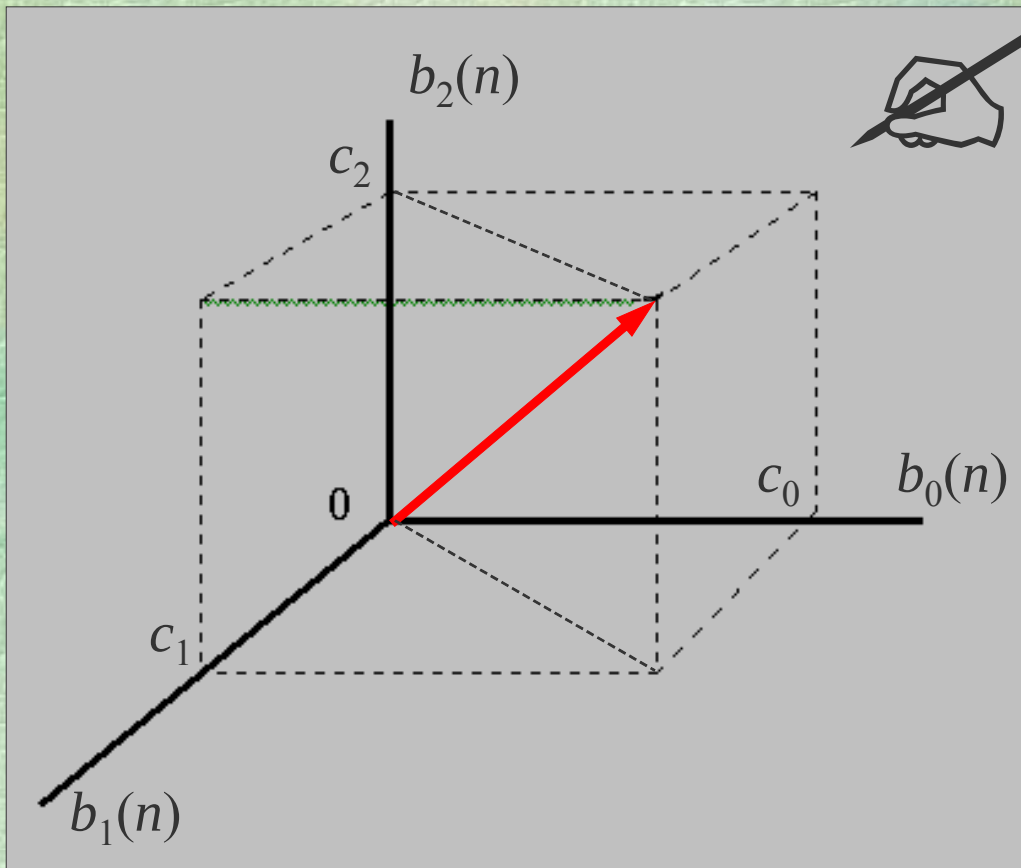
Najczęściej jako baze wybiera się zbiór liniowo niezależnych funkcji **ortogonalnych**, dla których spełniony jest warunek:



$$\sum_{n=0}^{N-1} b_k(n) \cdot b_l^*(n) = 0, \quad k \neq l,$$

gdzie (*) – jest symbolem sprzężenia zespolonego.

 W tym przypadku sygnał $\{x(n)\}$ można rozpatrywać jako wektor w układzie współrzędnych, którego osiami są funkcje bazowe.



Współczynnikami widmowymi są współrzędne wektorów na odpowiednich osiach.

2. System musi być **uporządkowany**. To oznacza, że w zbiorze indeksów ma miejsce „relacja porządku” określająca jaka z funkcji jest poprzedzająca i jaka jest następna.



Na przykład funkcje harmoniczne zwykle uporządkowane są według wzrostu argumentu (częstotliwości): $1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(kx)$.



Od wprowadzonej „relacji porządku” zależy kształt widma i wygodność jego wykorzystywania.

Na przykład, przy analizie widmowej Fouriera systemów z ograniczonym pasmem częstotliwości często zostają odrzucone składowe widma odpowiadające wysokim częstotliwością.

3. Funkcje bazowe na przedziale ortogonalności powinni posiadać skończoną energię:

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_k^2(n) < \infty$$



4. System funkcji powinien tworzyć **rodzinę zupełną**.



To oznacza, że niemożliwe jest dodanie ani jednej funkcji, która byłaby ortogonalna względem reszty wszystkich funkcji systemu.



Szeregi Fouriera

Tak więc dowolny sygnał okresowy możemy przedstawić w postaci sumy wielu składowych.

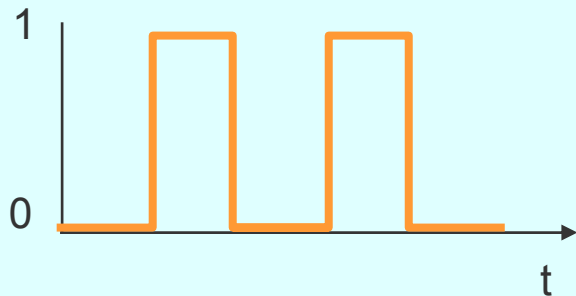
Jedną z metod takiego opisu sygnału nazywamy **szeregiem Fouriera**.

Metoda ta zakłada, że zbiór składowych ma częstotliwości, które są wielokrotnościami jakiejś podstawowej częstotliwości f :

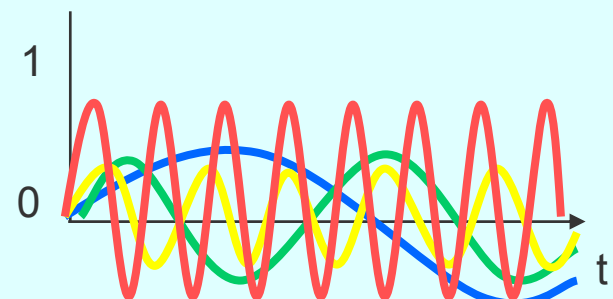
$$x(t) = \frac{1}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi nft)$$

Z powyższych rozwiązań wynika iż przebiegi złożone mogą być rozbite na wiele prostych przebiegów sinusoidalnych i kosinusoidalnych o różnych częstotliwościach.

Na przykład ciąg impulsów prostokątnych składa się z nieskończonej ilości sinusoid o różnych amplitudach.



ideal periodic signal

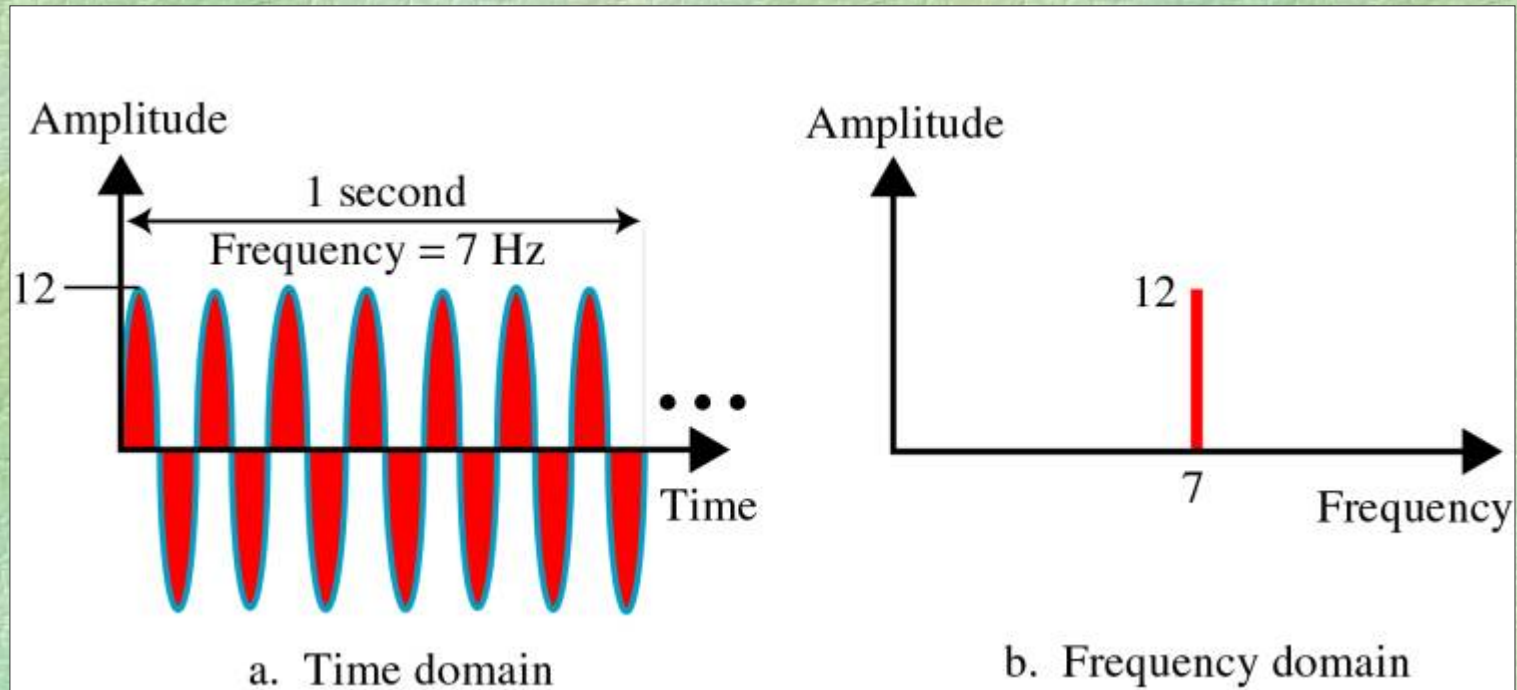


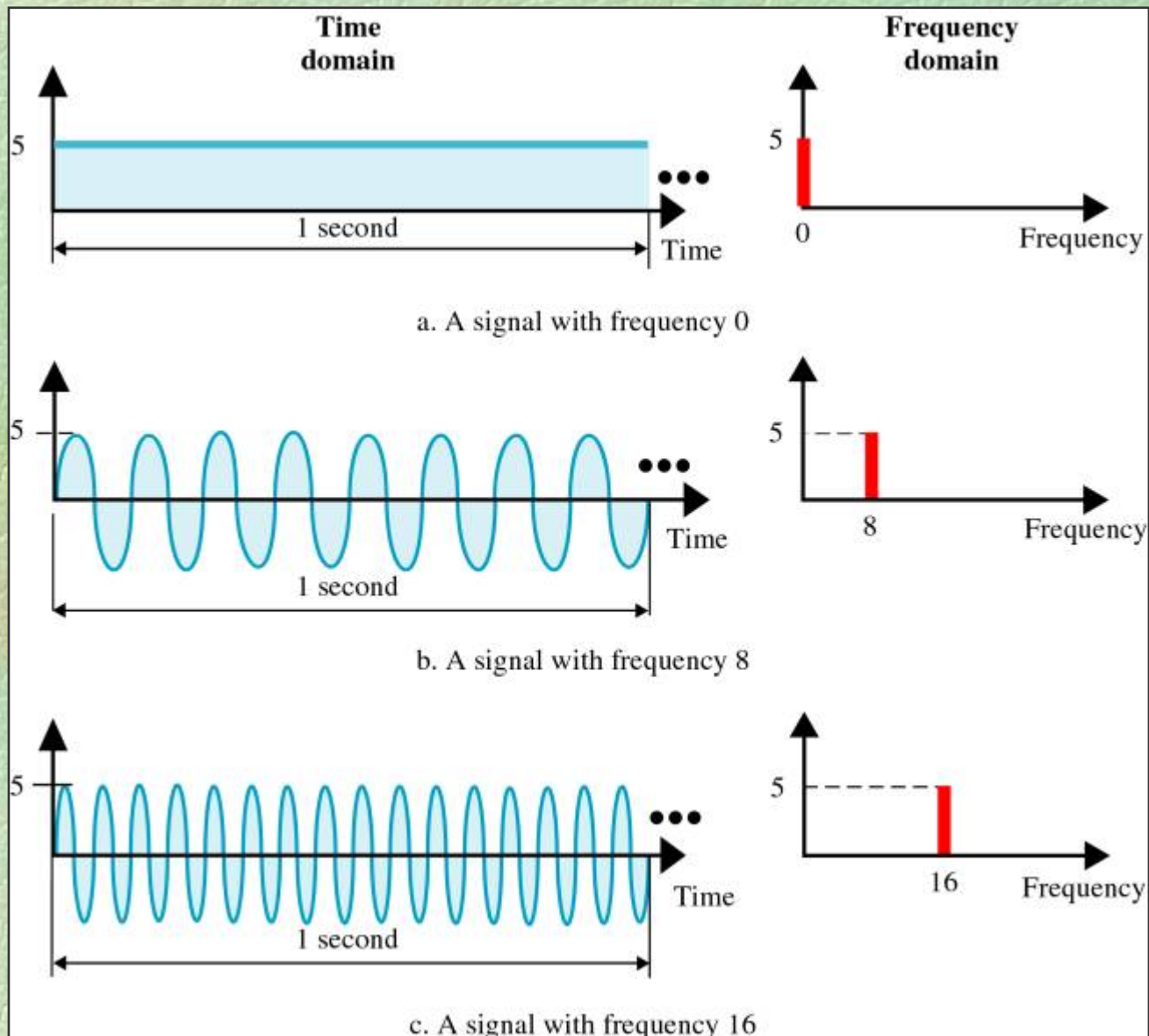
**real composition
(based on harmonics)**

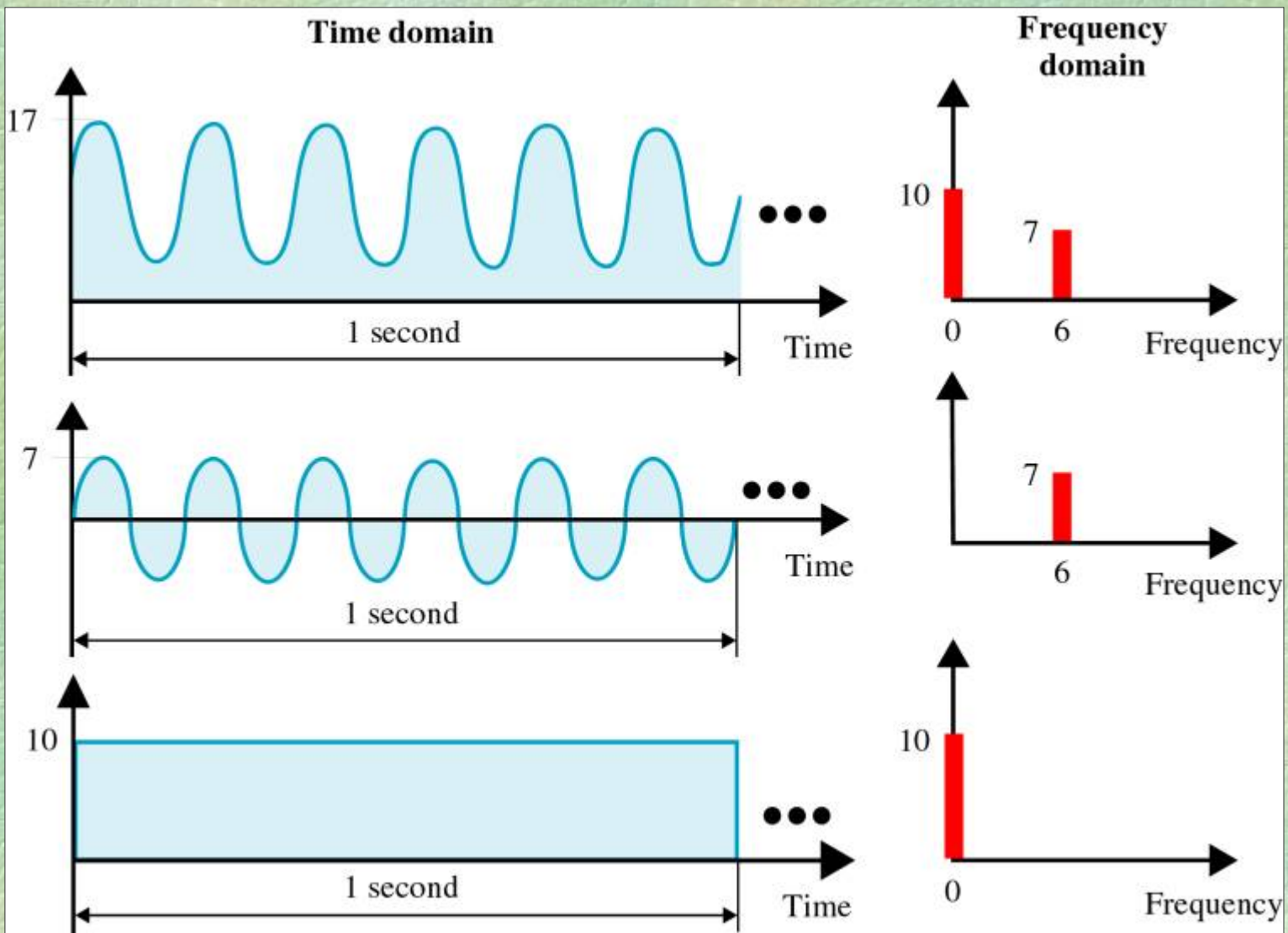
Dowolny przebieg okresowy może być reprezentowany przez szeregi Fouriera przy założeniu, że N jest dostatecznie duże.

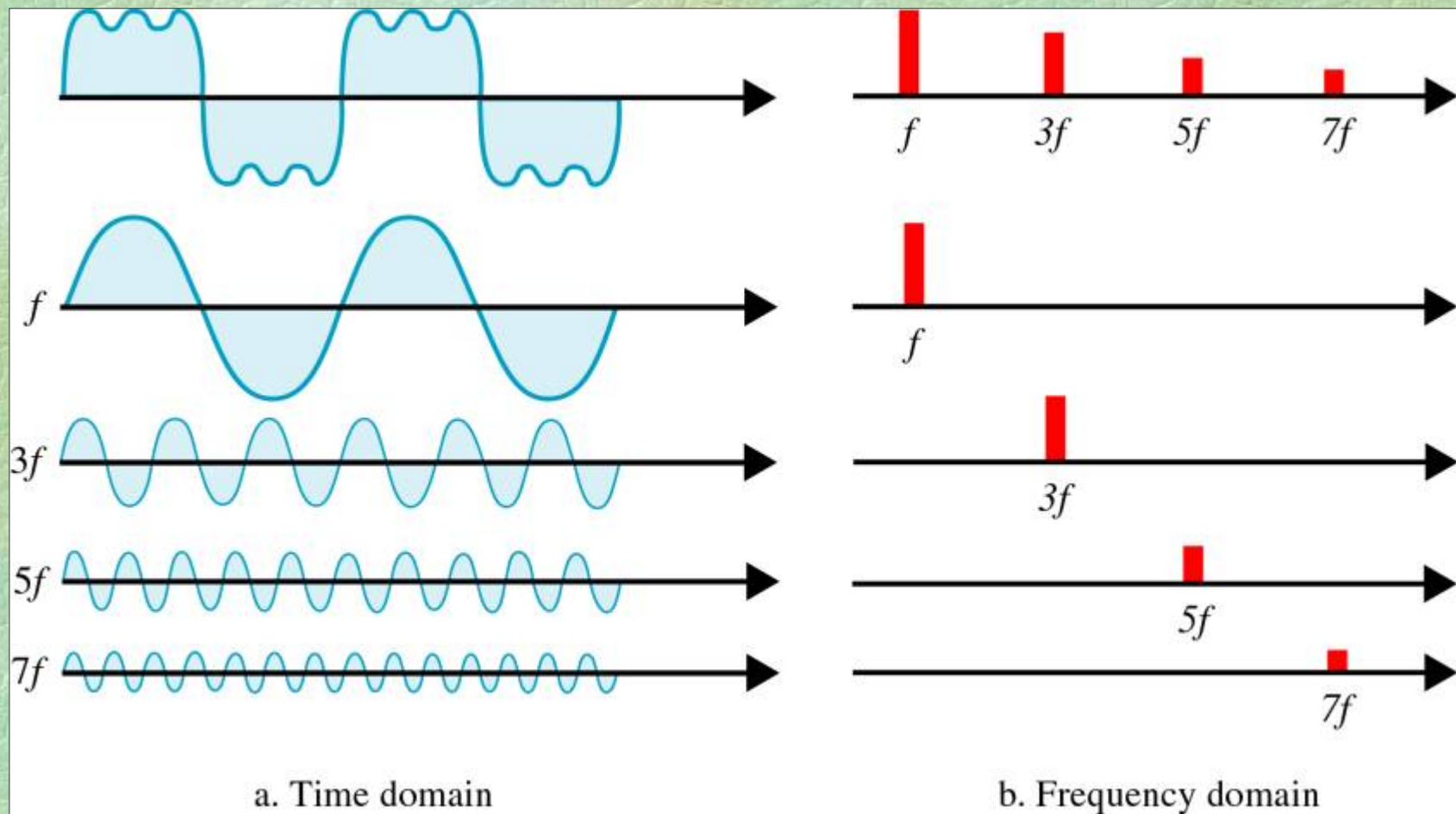
Poszczególne składowe częstotliwościowe znane są pod nazwą **harmonicznych**, a cały zestaw tych składowych nazywa się **widmem sygnału**. 

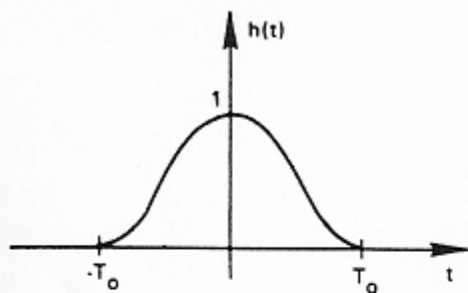
Za pomocą uogólnionych szeregów Fouriera można przedstawić przebieg sygnału o dowolnej postaci.









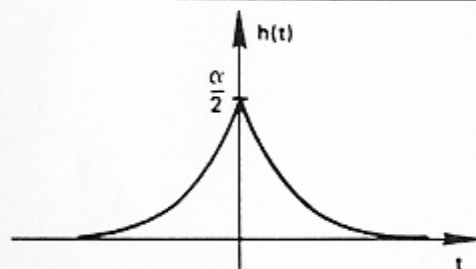
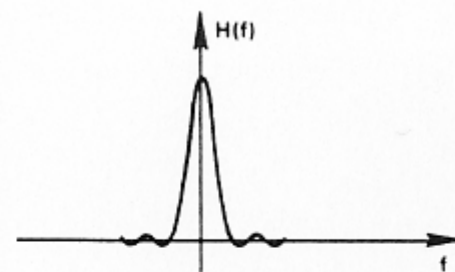


$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) & |t| \leq T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases}$$



$$H(f) = \frac{1}{2} Q(f) + \frac{1}{4} \left[Q\left(f + \frac{1}{2T_0}\right) + Q\left(f - \frac{1}{2T_0}\right) \right]$$

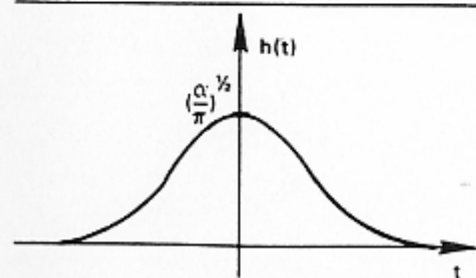
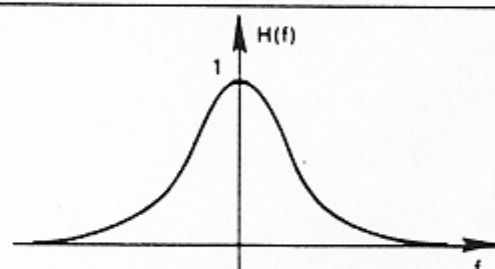
$$Q(f) = \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{\pi f}$$



$$h(t) = \frac{1}{2} \alpha \exp(-\alpha |t|)$$



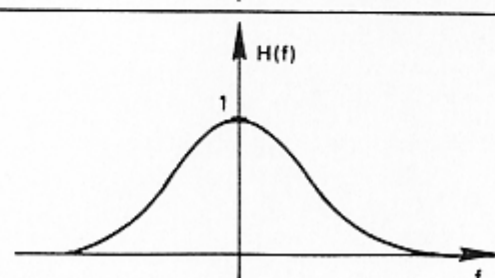
$$H(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

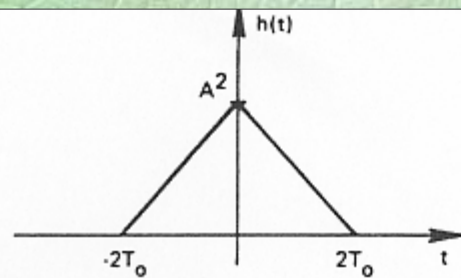


$$h(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \exp(-\alpha t^2)$$



$$H(f) = \exp\left(\frac{-\pi^2 f^2}{\alpha}\right)$$

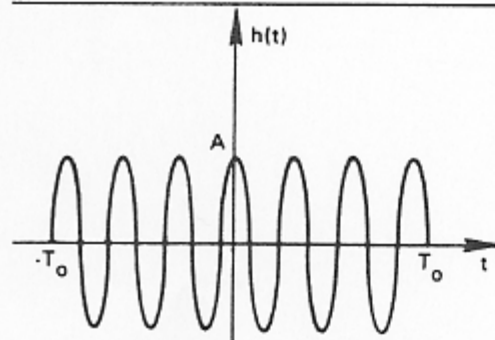
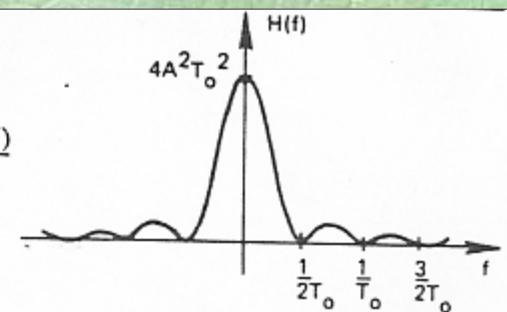




$$h(t) = -\frac{A^2}{2T_0}t + A^2 \quad |t| < 2T_0$$

$$= 0 \quad |t| > 2T_0$$

$$H(f) = A^2 \frac{\sin^2(2\pi T_0 f)}{(\pi f)^2}$$

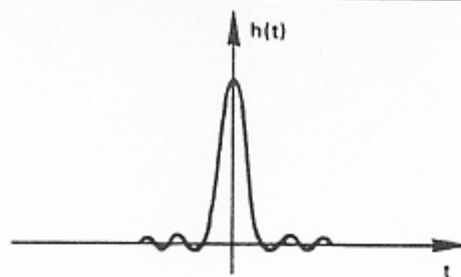
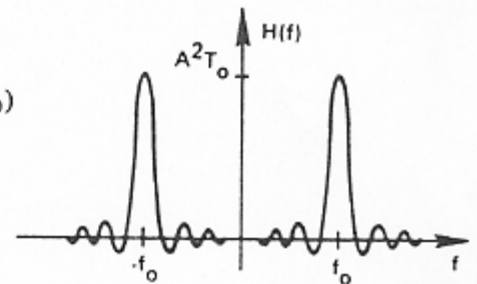


$$h(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad |t| < T_0$$

$$= 0 \quad |t| > T_0$$

$$H(f) = A^2 T_0 [Q(f + f_0) + Q(f - f_0)]$$

$$Q(f) = \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$

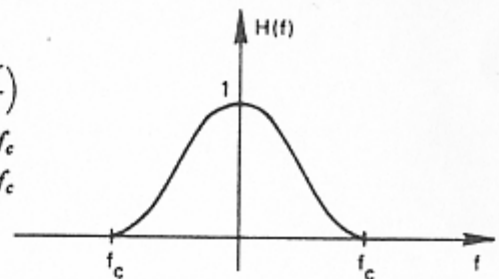


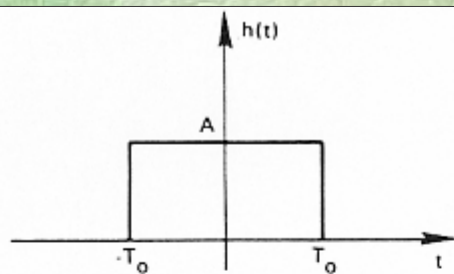
$$h(t) = \frac{1}{2}q(t) + \frac{1}{4}q\left(t + \frac{1}{2f_c}\right) + \frac{1}{4}q\left(t - \frac{1}{2f_c}\right)$$

$$q(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$

$$H(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi f}{f_c}\right) \quad |f| \leq f_c$$

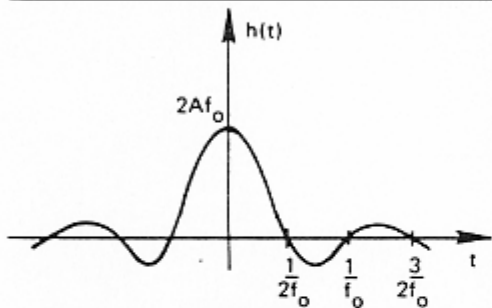
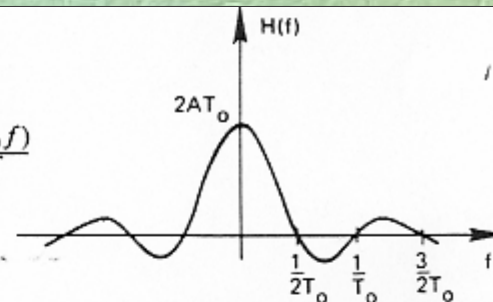
$$= 0 \quad |f| > f_c$$





$$\begin{aligned} h(t) &= A & |t| < T_0 \\ &= \frac{A}{2} & |t| = T_0 \\ &= 0 & |t| > T_0 \end{aligned}$$

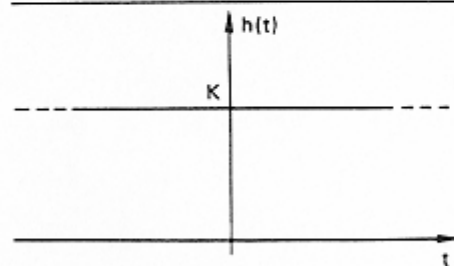
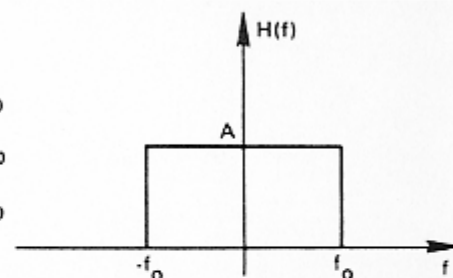
$$\circ \longrightarrow \bullet \quad H(f) = 2AT_0 \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$



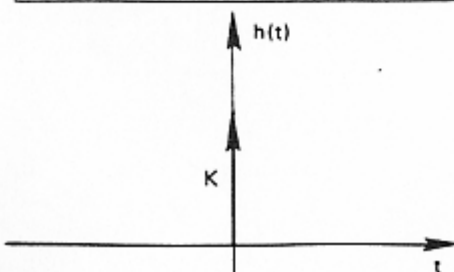
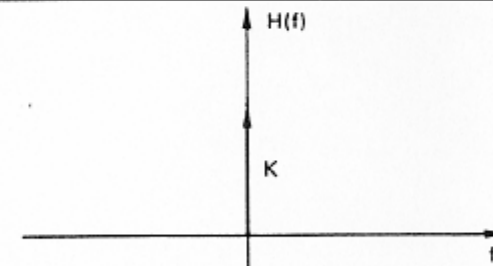
$$h(t) = 2Af_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$$

$\circ \longrightarrow \bullet$

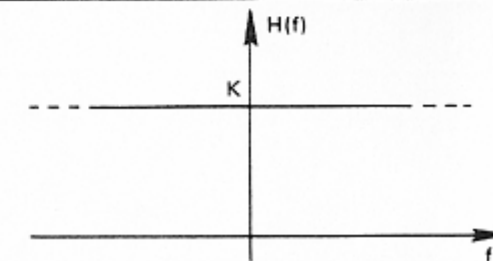
$$\begin{aligned} H(f) &= A & |f| < f_0 \\ &= \frac{A}{2} & |f| = f_0 \\ &= 0 & |f| > f_0 \end{aligned}$$

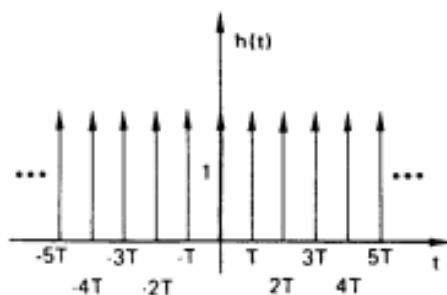


$$h(t) = K \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad H(f) = K\delta(f)$$



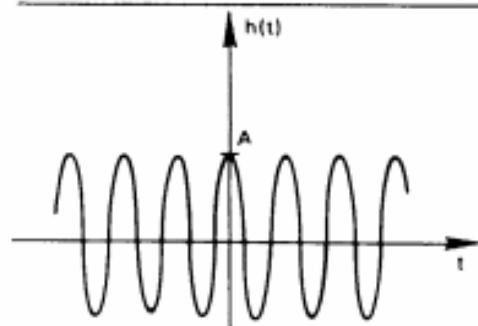
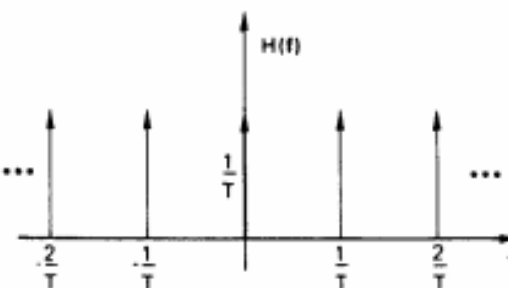
$$h(t) = K\delta(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad H(f) = K$$





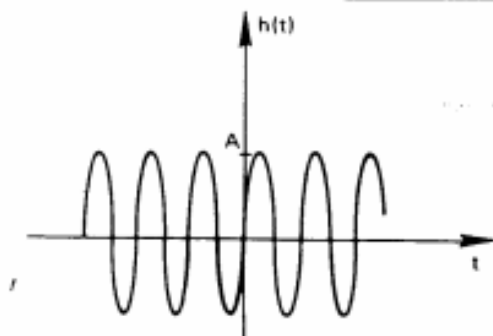
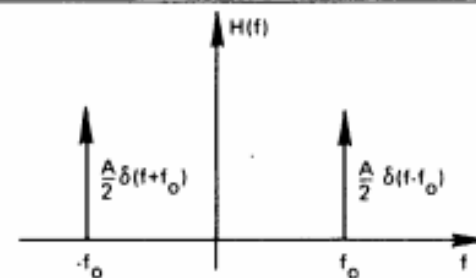
$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



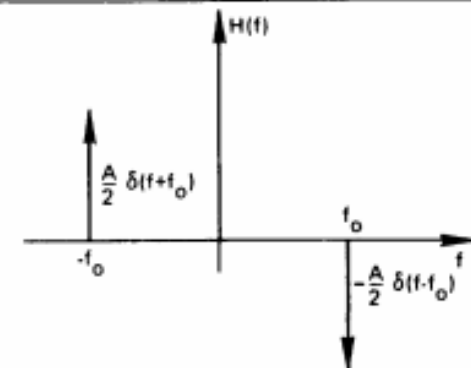
$$h(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$H(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$



$$h(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

$$H(f) = -j \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + j \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



Urodził się 21 marca 1768 roku w Auxerre, we Francji. Pochodził z bardzo biednej rodziny.

W 9 roku życia stracił obydwójce rodziców. Brak pochodzenia i tytułu szlacheckiego uniemożliwiły mu naukę w szkole wyższej. Sytuację zmieniła dopiero Rewolucja Francuska.

Fourier zainteresowania matematyczne łączył z działalnością polityczną.

Był dwukrotnie uwięziony, dwukrotnie udało mu się uniknąć gilotyny w okresie Rewolucji Francuskiej.



Współpracował z Naoleonem Bonaparte, który w 1802 mianował go prefektem dzielnicy Francji z siedzibą w Grenoble. I właśnie w tym okresie Fourier opracował swoją teorię.

W 1807r. praca Fouriera była recenzowana przez czterech znakomitych naukowców matematyków.

Trzech z nich oceniło ją pozytywnie, lecz czwarty, J.L. Lagrange, podtrzymał swoje krytyczne stanowisko sprzed 50 lat.

W efekcie praca ta nie została opublikowana. Po poprawkach i przeróbkach ukazała się w postaci książkowej 15 lat później, w 1822r.

Dyskretne przekształcenie Fouriera (DFT)

Dyskretne funkcji wykładowe.

$$x(t) = \frac{1}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi nft)$$

Po pierwsze, w rzeczywistych warunkach nie jest możliwa realizacja nieskończonego sumowania, gdyż nigdy nie osiągnęlibyśmy wyniku końcowego.

Po drugie, czas przeznaczony na osiągnięcie wartości wyjściowej jest limitowany.

Wynika stąd, że liczba częstotliwości biorących udział w obliczeniach jest ograniczona.

Dyskretna transformata Fouriera (Discrete Fourier Transform – DFT) ustala wzajemny związek między czasowej i częstotliwościowej reprezentacji sygnału przy jego rozkładzie na szereg składowych harmonicznym. 



Ona ma wielorakie zastosowania przy analizie widmowej i korelacyjnej, przy syntezie filtrów, w technice wykrywania i oceny sygnałów.

Na czas obecny opracowane są efektywne metody obliczania DFT, pozwalające realizować różne zadania CPS, które dotychczas byli nierozwiązywalne z powodu dużej złożoności obliczeniowej.

👉 W dyskretnej transformacie Fouriera wykorzystuje się system **funkcji wykładniczych** (angl. discrete exponential functions – **DEF**) zdefiniowanych za pomocą następującego wzoru:

$$def(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) = \cos \frac{2\pi}{N} kn - j \sin \frac{2\pi}{N} kn, \quad n, k = \overline{0, N-1}$$

Oznaczmy $w = \exp(-\frac{2\pi}{N})$. Wtedy $def(k, n) = w^{k,n}$

Wielkość $w^{k,n}$ zwykle nazywa się **współczynnikiem skrętu** i reprezentuje sobą wektor w płaszczyźnie zespolonej.

Cały system **DEF** można zapisać w postaci macierzy $\mathbf{E}_N$, której wiersze są numerowane za pomocą indeksu k , kolumny – za pomocą indeksu n , a na skrzyżowaniu k -tego wiersza i n -tej kolumny zapisana jest wartość $w^{k,n}$.

$$\mathbf{E}_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots & N-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & w^{kn} & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \end{array} \right] \end{matrix}$$



Na przykład dla $N=8$ macierz $\mathbf{E}_8$ ma postać:

$$\mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ w^0 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ w^0 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 & w^4 & w^7 & w^2 & w^8 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^1 & w^6 & w^3 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}.$$

Własności systemu DEF

1.Ortogonalność

$$\sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} w^{-ln} = \begin{cases} N, & \text{dla } (k-l) = 0 \bmod N \\ 0, & \text{dla } (k-l) \neq 0 \bmod N \end{cases}$$



Cecha ortogonalności wskazuje na to, że iloczyn skalarny dwóch dowolnych wierszy macierzy $\mathbf{E}_N$ (z których jeden wiersz jest sprzężony) jest równym zeru w przypadku różnych wierszy i równy N w przypadku ich koincydencji.

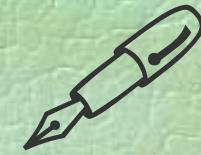
Notacja macierzowa tej własności ma następującą postać:

$$\mathbf{E}_N (\mathbf{E}_N^T)^* = N \mathbf{I}_N$$



gdzie $\mathbf{I}_N$ – jest macierzą jednostkową.

2. Okresowość



Jeśli $kn = N \cdot l + r$, wówczas $w^{kn} = w^{Nl} \cdot w^r = w^r$, co pozwala zapisać elementy macierzy E_N ze zminimalizowanymi wartościami wykładników współczynników skrętu.

$$E_8 = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ w^0 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ w^0 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 & w^4 & w^7 & w^2 & w^8 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^1 & w^6 & w^3 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}.$$

3. Symetryczność

$$\mathbf{E}_N = \mathbf{E}_N^T$$



Własność symetryczności pozwala łatwo znaleźć macierz odwrotną $\mathbf{E}_N$.

Stąd wynika, że

$$\mathbf{E}_N^{-1} = N^{-1} \cdot \mathbf{E}_N^*$$

4. Multiplikatywność

$$\begin{aligned}w^{k_1, n} \cdot w^{k_2, n} &= w^{(k_1 + k_2), n}, \\w^{k, n_1} \cdot w^{k, n_2} &= w^{k(n_1 + n_2)}.\end{aligned}$$



Własność ta oznacza, że przy mnożeniu dwóch wierszy (kolumn) macierzy $\mathbf{E}_N$ ze sobą otrzymujemy wiersz (kolumnę) tej samej macierzy.

Numer wiersza (kolumny) będzie równy sumie wartości wykładników.

Dyskretna transformata Fouriera ma następującą postać:

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} x_n, k = \overline{0, N-1}, \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{-kn} c_k, n = \overline{0, N-1}.$$

Pierwszy wzór ma nazwę dyskretnej transformaty Fouriera, zaś wzor drugi nazywa się odwrotną transformatą Fouriera.

Sekwencja $\{x_n\}$ reprezentuje sobą próbki sygnału, zaś sekwencja $\{c_k\}$ - współczynniki widmowe.

Sformułowane właśnie dwa równania tworzą parę **DFT**, którą niebawem przeanalizujemy dokładniej.

W tej chwili mamy do dyspozycji parę równań umożliwiających nam dokonywanie dyskretnych (cyfrowych) wzajemnych przekształceń między dziedziną czasową i częstotliwościową.

W notacji macierzowej para transformat wygląda w następujący sposób:

$$\mathbf{C}_{N \times 1} = \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{X}_{N \times 1}$$



$$\mathbf{X}_{N \times 1} = \frac{1}{N} \mathbf{E}_N^{-1} \cdot \mathbf{C}_{N \times 1}$$

gdzie $\mathbf{X}_{N \times 1} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ $\mathbf{C}_{N \times 1} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$

są odpowiednio wektorami próbek sygnału i współczynników widmowych.



Własności DFT

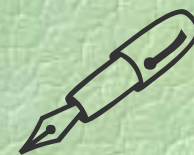
1. Okresowość



Widmo wytwarzane za pośrednictwem DFT jest okresowe:

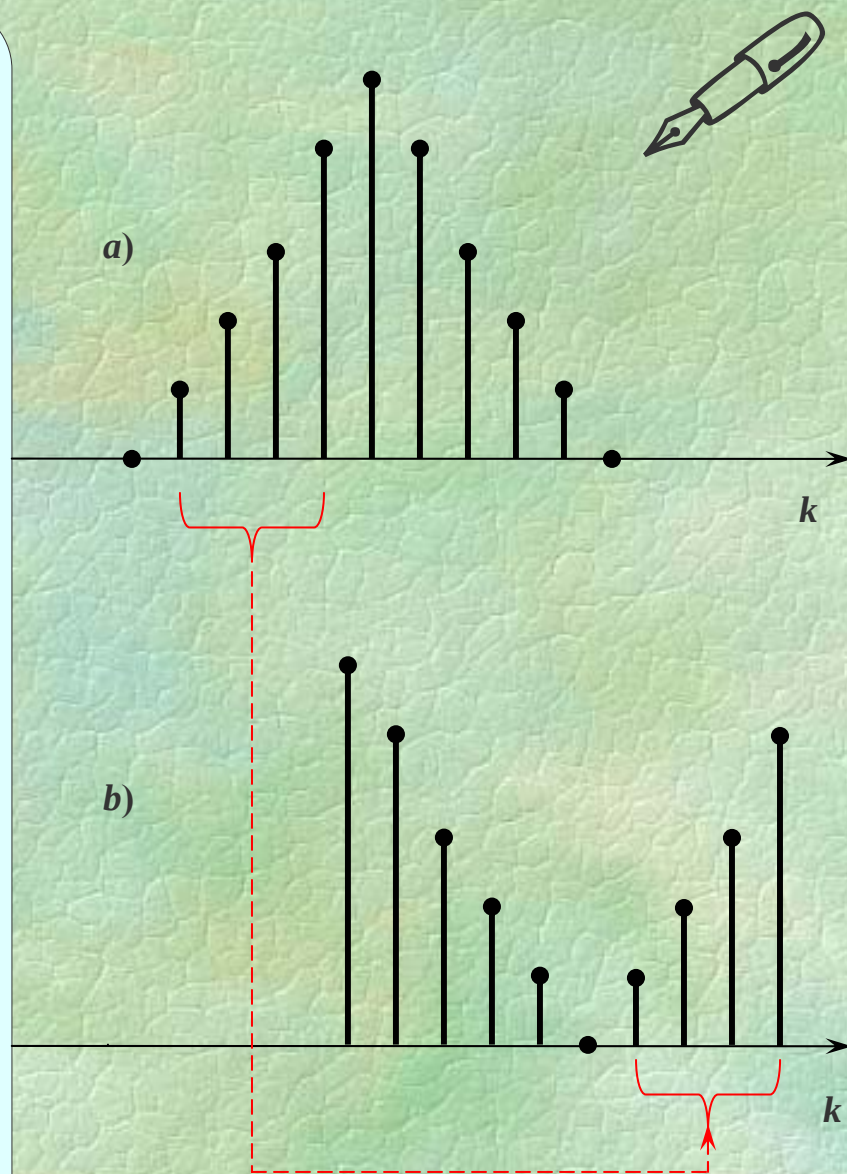
$$C_{Nl\pm k} = C_{\pm k}$$

2. Związek ze współczynnikami szeregu Fouriera



Jeśli częstotliwość próbkowania została wybrana według prawa Szannona, to wówczas DFT pozwala na podstawie próbek x_n wyznaczyć widmo, które na interwale $0 \leq k \leq N-1$ odpowiada widmowi sygnału wejściowego.

Przy czym pierwsze $(N/2-1)$ wartości $\{c_k\}$ odpowiadają współczynnikom widmowym na dodatnich częstotliwościach, ostatnie $(N/2-1)$ wartości $\{c_k\}$ zaś, odpowiadają współczynnikom widmowym na częstotliwościach ujemnych.





W przypadku transformaty odwrotnej pierwsze $(N/2 - 1)$ wartości x_n odpowiadają dodatniej części próbek sygnału w dziedzinie czasu, ostatnie $(N/2 - 1)$ wartości zaś – ujemnej części próbek w dziedzinie czasu.

3. Liniowość



Jeśli $\mathbf{X}_{N \times 1}$ - wektor składający się z próbek sygnału, $\mathbf{C}_{N \times 1}$ - wektor współczynników DFT, oraz α - pewen skalar, wówczas:

$$\alpha \mathbf{C}_{N \times 1} = \mathbf{E}_N \cdot (\alpha \mathbf{X}_{N \times 1})$$



Ponadto jeśli $\mathbf{X}_{N \times 1}$ - wektor składający się z próbek jednego sygnału, zaś $\mathbf{Y}_{N \times 1}$ - wektor składający się z próbek drugiego sygnału, oraz $\mathbf{C}_{N \times 1}^{(\mathbf{X})}$ i $\mathbf{C}_{N \times 1}^{(\mathbf{Y})}$ są odpowiednio współczynnikami DFT pierwszego i drugiego sygnału, wówczas:

$$\mathbf{C}_{N \times 1}^{(\mathbf{X})} + \mathbf{C}_{N \times 1}^{(\mathbf{Y})} = \mathbf{E}_N \cdot (\mathbf{X}_{N \times 1} + \mathbf{Y}_{N \times 1})$$

4. Przesunięcie cykliczne

Niech $\mathbf{X}_{N \times 1} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ $\mathbf{C}_{N \times 1} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$

są odpowiednio wektorami próbek sygnału i współczynników widmowych.

Przy przesunięciu cyklicznym sygnału $\mathbf{X}_{N \times 1}$ w lewo o l pozycji tak, iż

$$\mathbf{X}_{N \times 1}^{(\leftarrow l)} = [x_l, \dots, x_{N-1}, x_0, \dots, x_{l-1}]^T, \quad \forall l \in \overline{1, N-1}$$

będziemy mieli:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{N \times 1} = \text{diag} \left\{ \exp \left(j \frac{2\pi}{N} kl \right) \right\} \cdot \mathbf{C}_{N \times 1}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

Przy przesunięciu cyklicznym sygnału $\mathbf{X}_{N \times 1}$ w prawo o l pozycji w ten sposób iż

$$\mathbf{X}_{N \times 1}^{(l \rightarrow)} = [x_{N-l}, \dots, x_{N-1}, x_0, \dots, x_{N-l-1}]^T, \quad \forall l \in \overline{1, N-1}$$

otrzymamy

$$\vec{\mathbf{C}}_{N \times 1} = \text{diag}\left\{\exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kl\right)\right\} \cdot \mathbf{C}_{N \times 1}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

! Przy przesunięciu sygnału względem czasu widmo amplitudowe (wielkość amplitud pojedynczych składowych harmonicznym) nie zmienia się. Zmianie podlegają tylko fazy składowych harmonicznym (widmo fazowe).

5. Prawo Parsewala

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2$$

Energia sygnału przed przetwarzaniem
równa się energii sygnału po przetwarzaniu.

Energia się nie traci!



6. Symetria widma sygnału rzeczywistego

Dla sygnałów rzeczywistych widmo wytwarzane za pośrednictwem DFT charakteryzuje się symetrią parzystą wzdłuż osi rzeczywistej oraz symetrią nieparzystą wzdłuż osi urojonej - wynika to z faktu, że współczynniki skreću zawsze występują w postaci par sprzężonych.

Oznacza to po prostu, że jeśli mamy do czynienia z sygnałem rzeczywistym, wówczas ilość niezbędnej do zapamiętania informacji dotyczącej widma częstotliwościowego jest mniejsza, gdyż informacja ta powtarza się.

7. Widmo amplitudowe a widmo fazowe

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N/2$$

Widmo amplitudowe

$$|X[k]| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[X[k]] + \operatorname{Im}^2[X[k]}}$$

Widmo fazowe

$$\arg(X[k]) = \arctan \frac{\operatorname{Im}[X[k]]}{\operatorname{Re}[X[k]}}$$

**Numeryczne
obliczanie widma
sygnału.
Szybka transformata
Fouriera**

Mamy więc narzędzie umożliwiające dokonywanie obustronnych przekształceń między dziedziną czasową i częstotliwościową, lecz w dalszym ciągu nie wiemy w jaki sposób należy zaprogramować urządzenie DSP by mogło realizować dyskretne przekształcenie Fouriera.

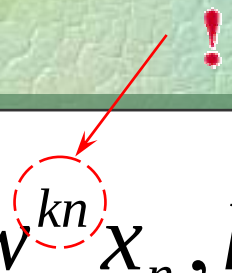
Nie znamy także komplikacji na jakie możemy się natknąć podczas projektowania przetwarzającego algorytmu DSP.

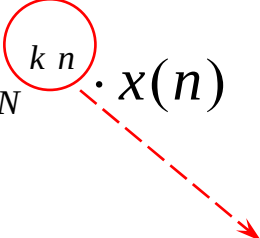
DFT jest niezwykle efektywną metodą określania widma częstotliwościowego dowolnego sygnału.

Jedyną niedoskonałością tej techniki jest znaczny **czas** niezbędny do obliczenia rezultatu końcowego.



Dzieje się tak dlatego, że w celu wytworzenia pełnego zestawu współczynników wyjściowych obydwa wskaźniki, k i n , powinny uwzględnić cały zakres swoich wartości (od 0 do $N-1$) i w związku z tym powinno być wykonane N^2 obliczeń.


$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} x_n, k = \overline{0, N-1},$$

$$c_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{k n} \cdot x(n) \quad , \text{ for } k \in [0, N-1]$$


$$\begin{bmatrix} c_N(0) \\ c_N(1) \\ \vdots \\ c_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_N^{00} & w_N^{01} & \dots & w_N^{0(N-1)} \\ w_N^{10} & w_N^{11} & \dots & w_N^{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & w_N^{k n} & \vdots \\ w_N^{(N-1)0} & w_N^{(N-1)1} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{X}$$

where $\mathbf{E}_N = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & w_N^{k n} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ is called the Fourier Matrix

Discrete Fourier Transform (DFT)

$$c_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j 2 \pi n k / N)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_N(k) \exp(j 2 \pi n k / N)$$

$$c_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi nk / N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \{ \cos(2\pi nk / N) - j \sin(2\pi nk / N) \}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_N(k) \exp(j2\pi nk / N)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_N(k) \{ \cos(2\pi nk / N) + j \sin(2\pi nk / N) \}$$

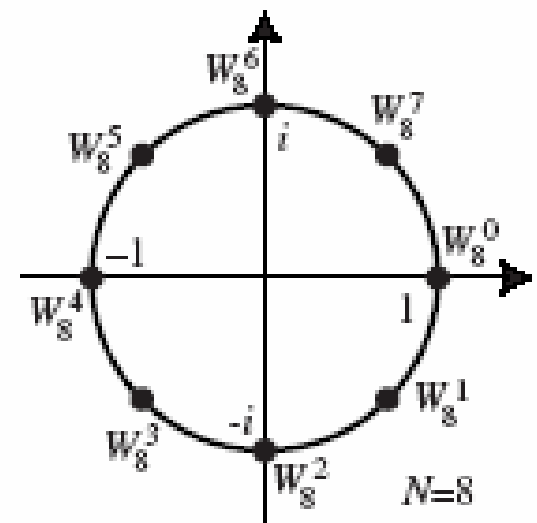
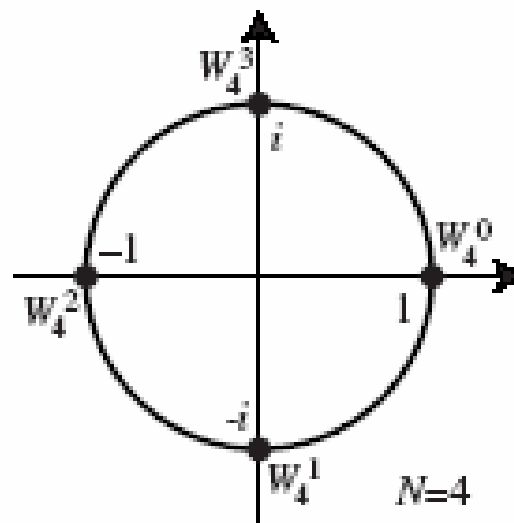
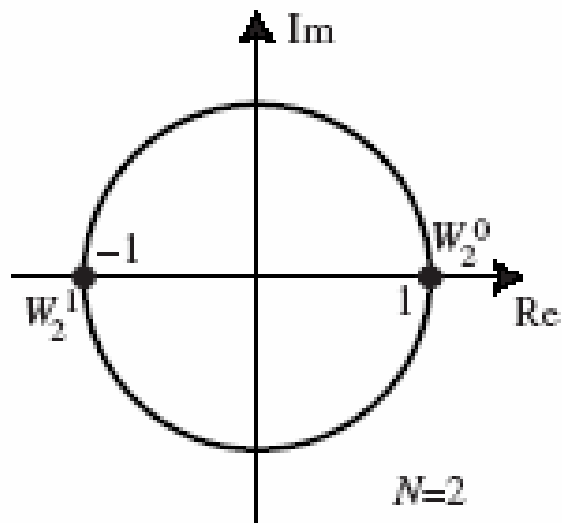
Przeglądając poprzednie dwa równania możemy przekonać się, że każda kolejna składowa równania zawiera w sobie funkcję mnożenia-dodawania, tak więc DFT o $N = 1000$ (1000-punktowe DFT) powinno wykonać co najmniej 10^6 cykli maszynowych, nawet przy zastosowaniu specjalizowanych procesorów DSP.

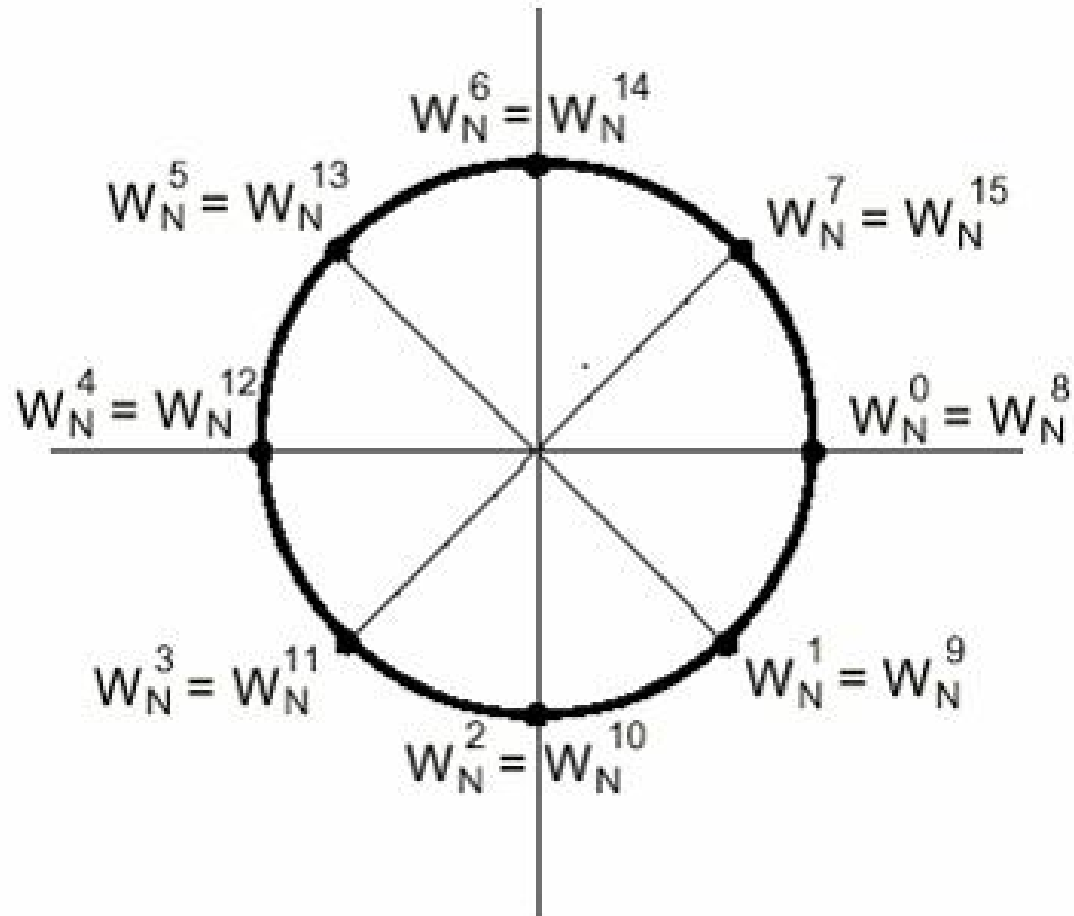
Wykorzystując układ DSP o czasie cyklu równym **50 ns** operacja ta zajmie około **0,05 s** i, w związku z tym, maksymalna częstotliwość próbkowania urządzenia nie może przekroczyć **20 Hz**!

Rozpatrzmy ponownie współczynnik skrętu w_N :

$$w_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

Przekonamy się wówczas, że ta sama wartość w_N występuje w obliczeniach DFT wielokrotnie, gdyż jest ona funkcją okresową o limitowanej liczbie odrębnych wartości.





Zadaniem więc szybkiego przekształcenia Fouriera (FFT), i jego odwrotności (IFFT), jest wykorzystanie tej nadmiarowości w celu redukcji liczby niezbędnych obliczeń cząstkowych. 

Z tego powodu istotne znaczenie mają procedury obliczeniowe redukujące liczbę mnożeń i sumowań. 

! Jedną z takich procedur jest **algorytm szybkiej transformaty Fouriera (FFT)**.

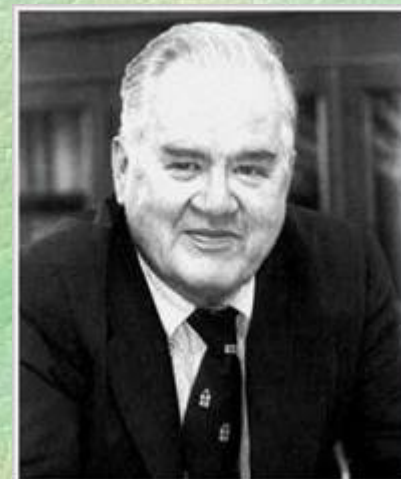
W roku **1965** pojawiła się publikacja pod tytułem „Algorytmy dla obliczeń komputerowych zespolonych szeregów Fouriera” autorstwa **Cooleya i Tukeya**.

Pozycja ta miała **przełomowe** znaczenie, gdyż proponowała znaczne udoskonalenie DFT.

Cooley J.W.



Tukey J.W.



W przypadku algorytmu FFT złożoność obliczeniowa wynosi $N/2 \cdot \log_2 N$, to znaczy że w efekcie liczba wykonywanych operacji redukowana jest do $N/2 \cdot \log_2 N$ mnożeń i dodawań.



Na przykład dla $N=4096$ bezpośrednie wykorzystanie wzoru dla DFT wymaga 16 milionów mnożeń.

Algorytm FFT w tym przypadku wymaga zaledwie 49 tysięcy mnożeń. **Ponad 300 razy mniej!!!**

Ogólna postać szybkiego przekształcenia Fouriera obejmuje wiele różnorodnych algorytmów o różnych właściwościach z ich zaletami i wadami.

Na przykład FFT optymalizowane pod kątem użycia języków wysokiego poziomu nie będzie prawdopodobnie prawidłowo funkcjonować przy zastosowaniu w stałoprzecinkowych urządzeniach DSP.

Niezależnie od tego wszystkie algorytmy **FFT** wykorzystują podobne podejście do problemu zmniejszenia długiego algorytmu obliczeniowego przez jego podział na **krótsze** i **prostsze** obliczenia DFT.



Przyjrzyjmy się więc szczegółom jednej z metod zamiany DFT przez bardziej przydatny FFT.

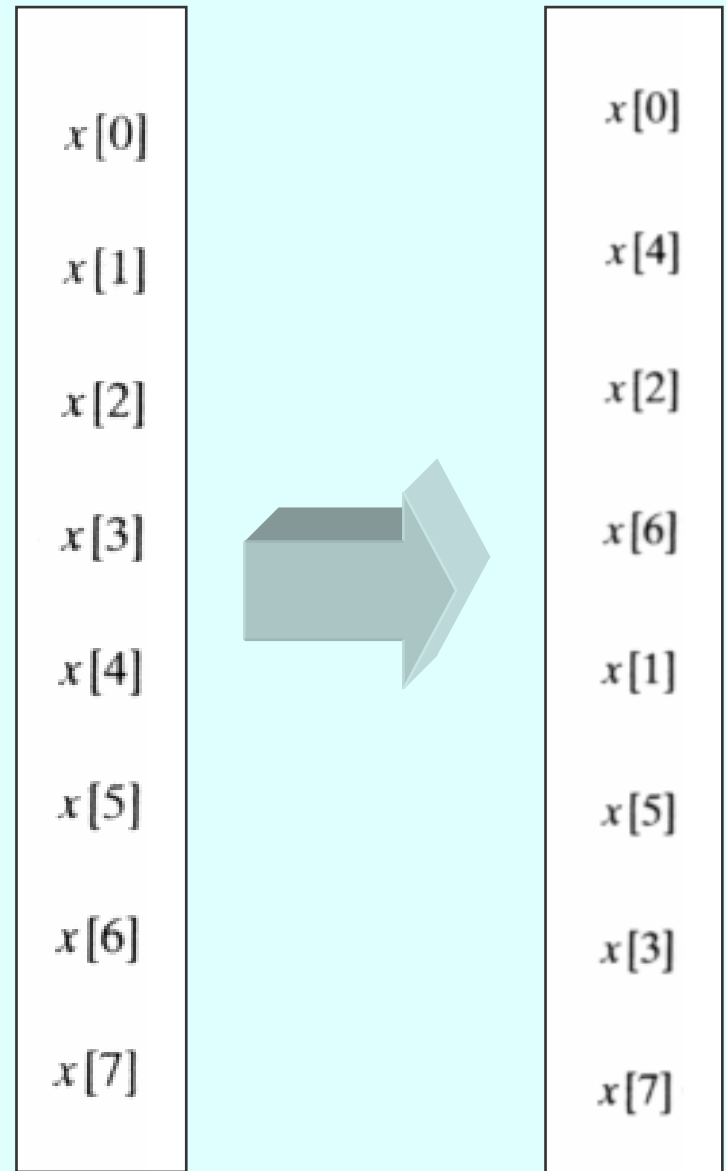
Pierwszym krokiem prowadzącym do redukcji algorytmu obliczeniowego jest podział sygnału wejściowego $x(n)$ na kilka przeplatających się sekwencji.

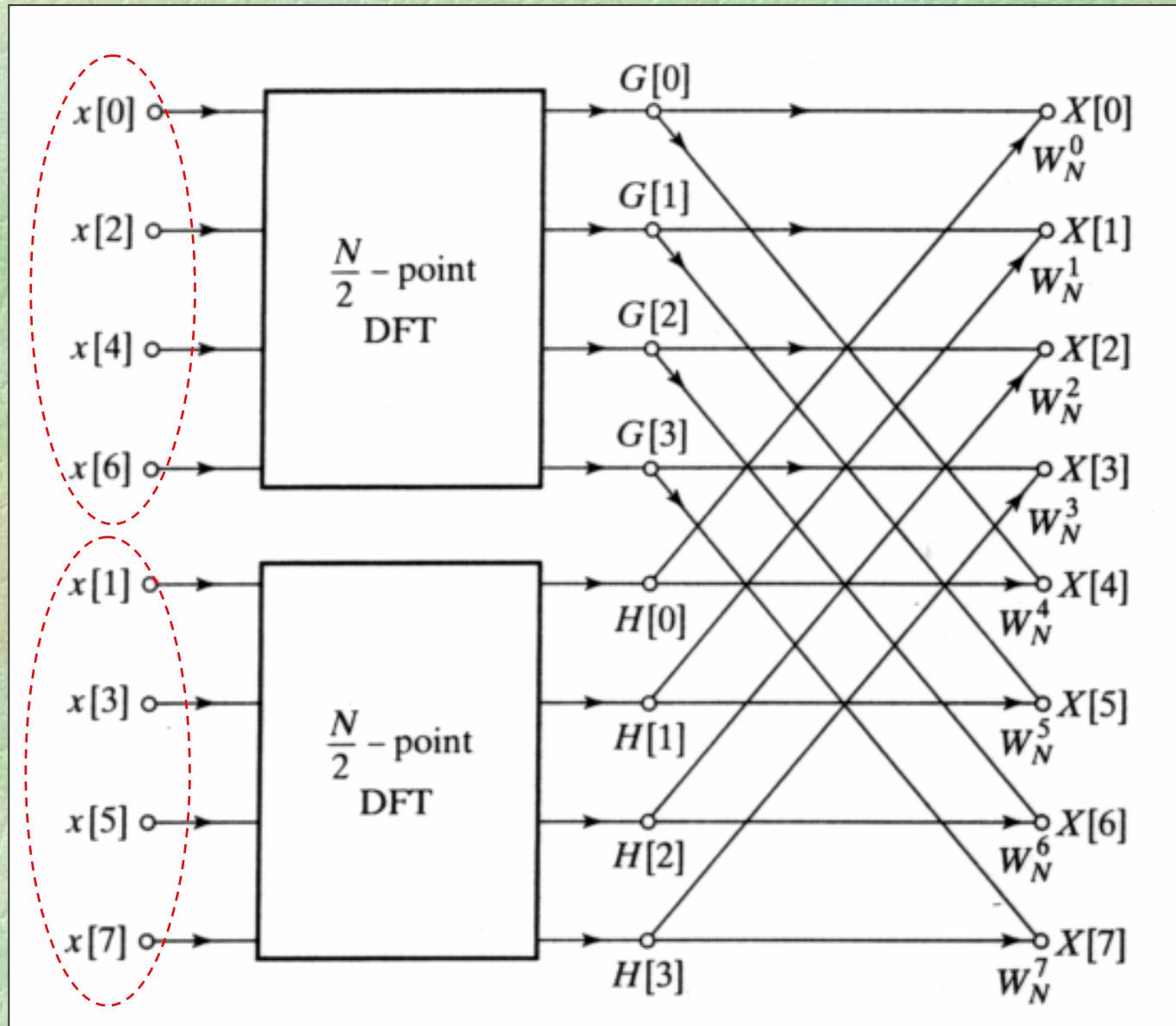


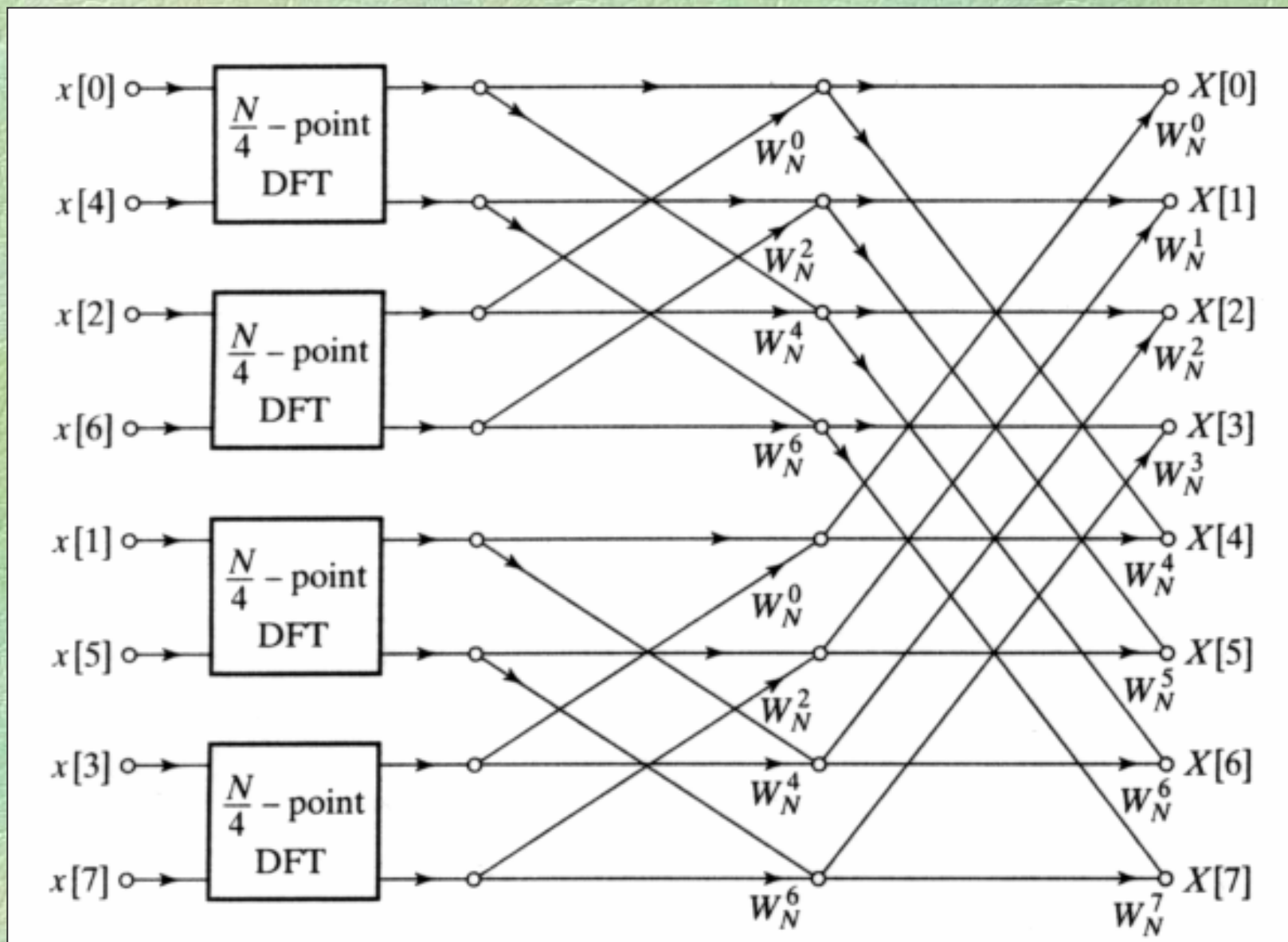
Operacja ta zwykle nazywana jest **decymacją czasową.**

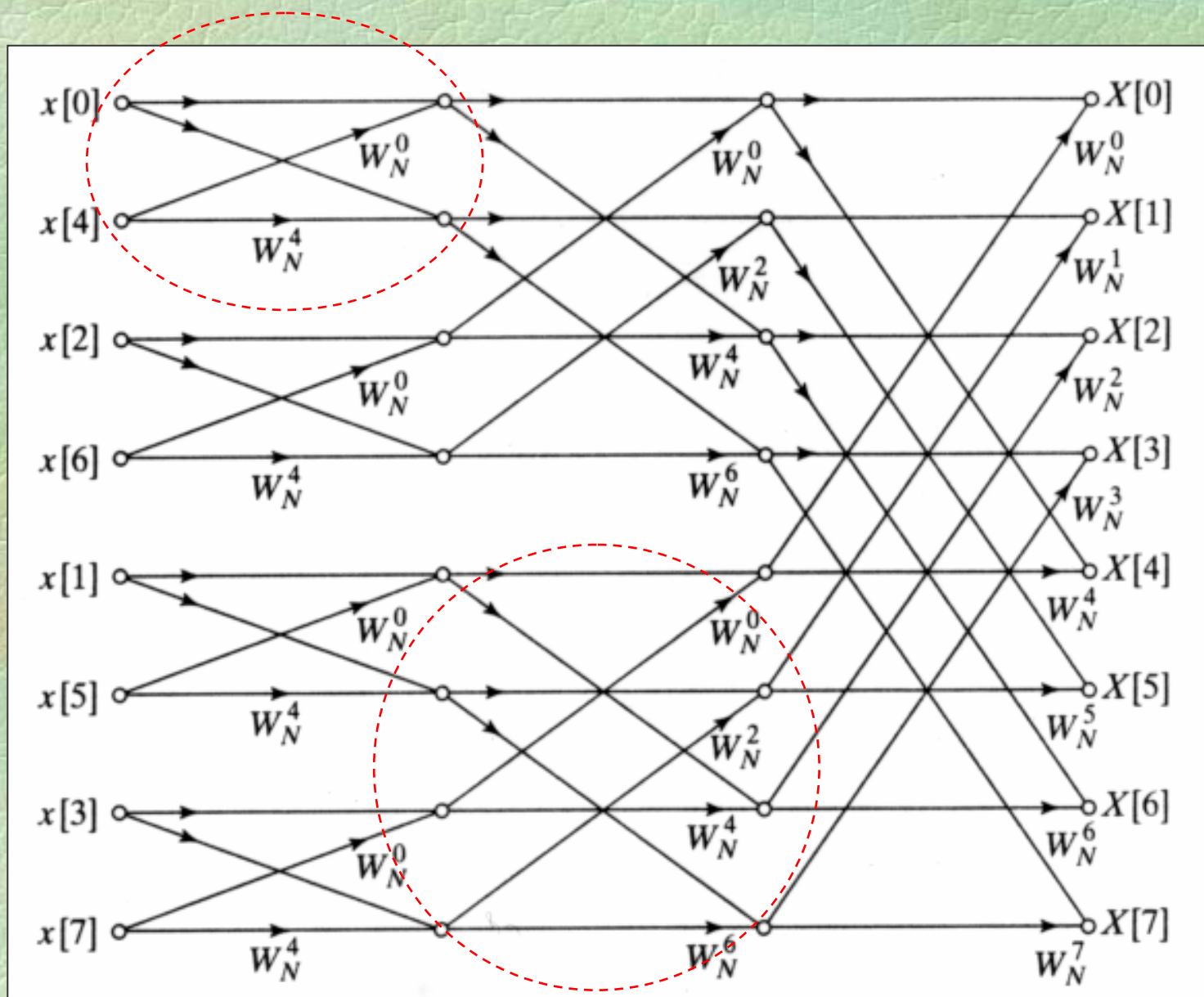


Weźmiemy pod uwagę nasz sygnał oryginalny o N próbkach i rozdzielimy go na dwie sekwencje (jedną o indeksach parzystych, drugą o nieparzystych)

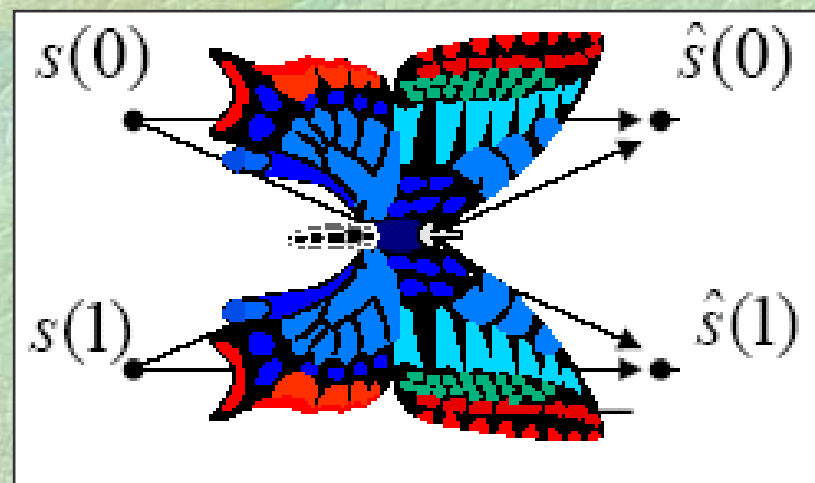
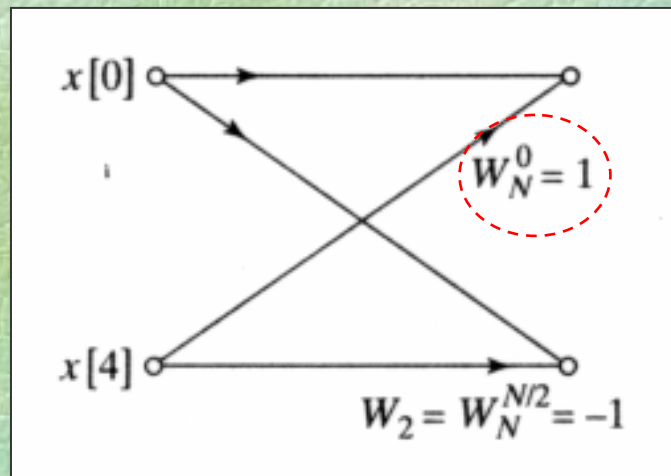




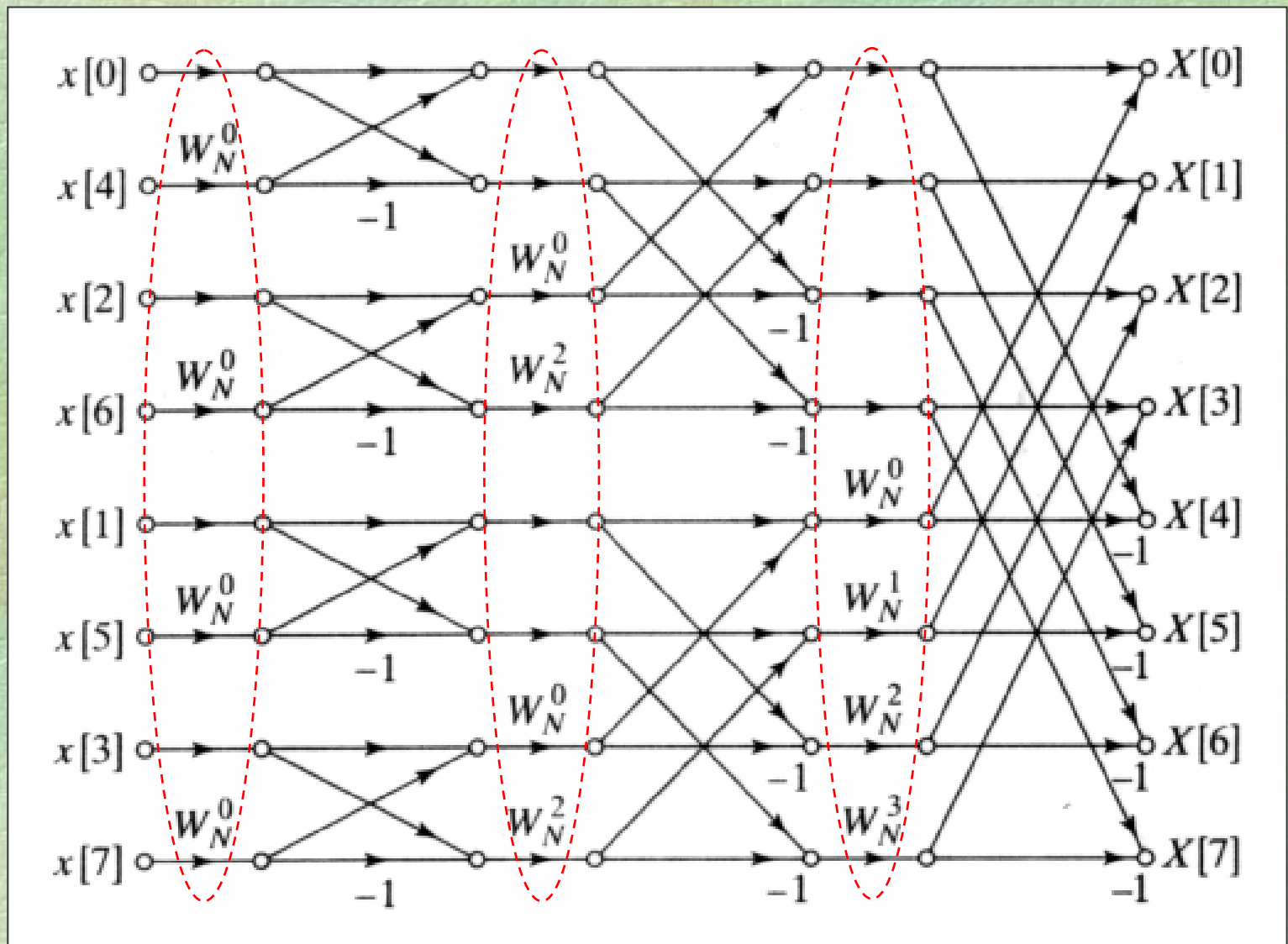


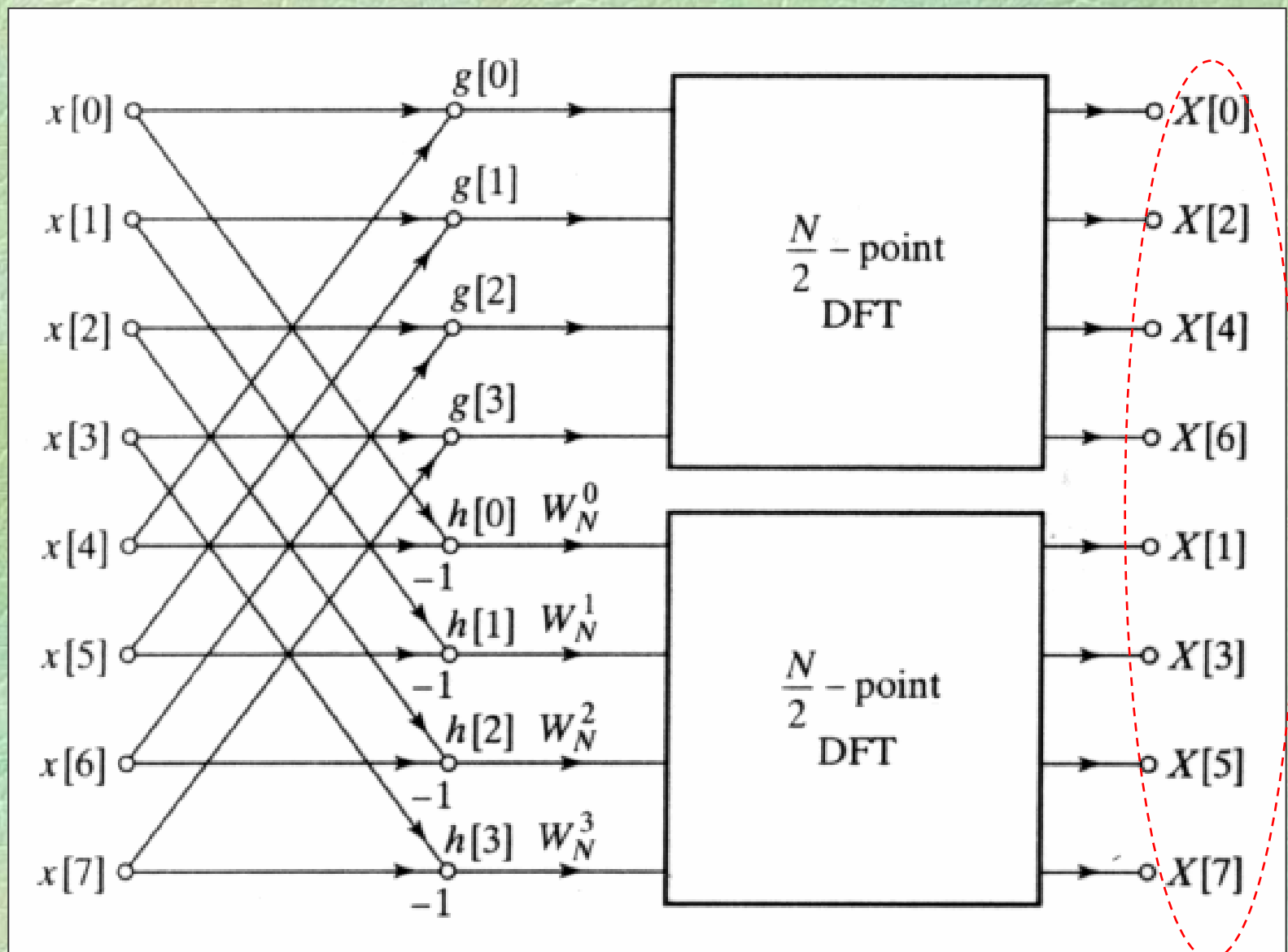


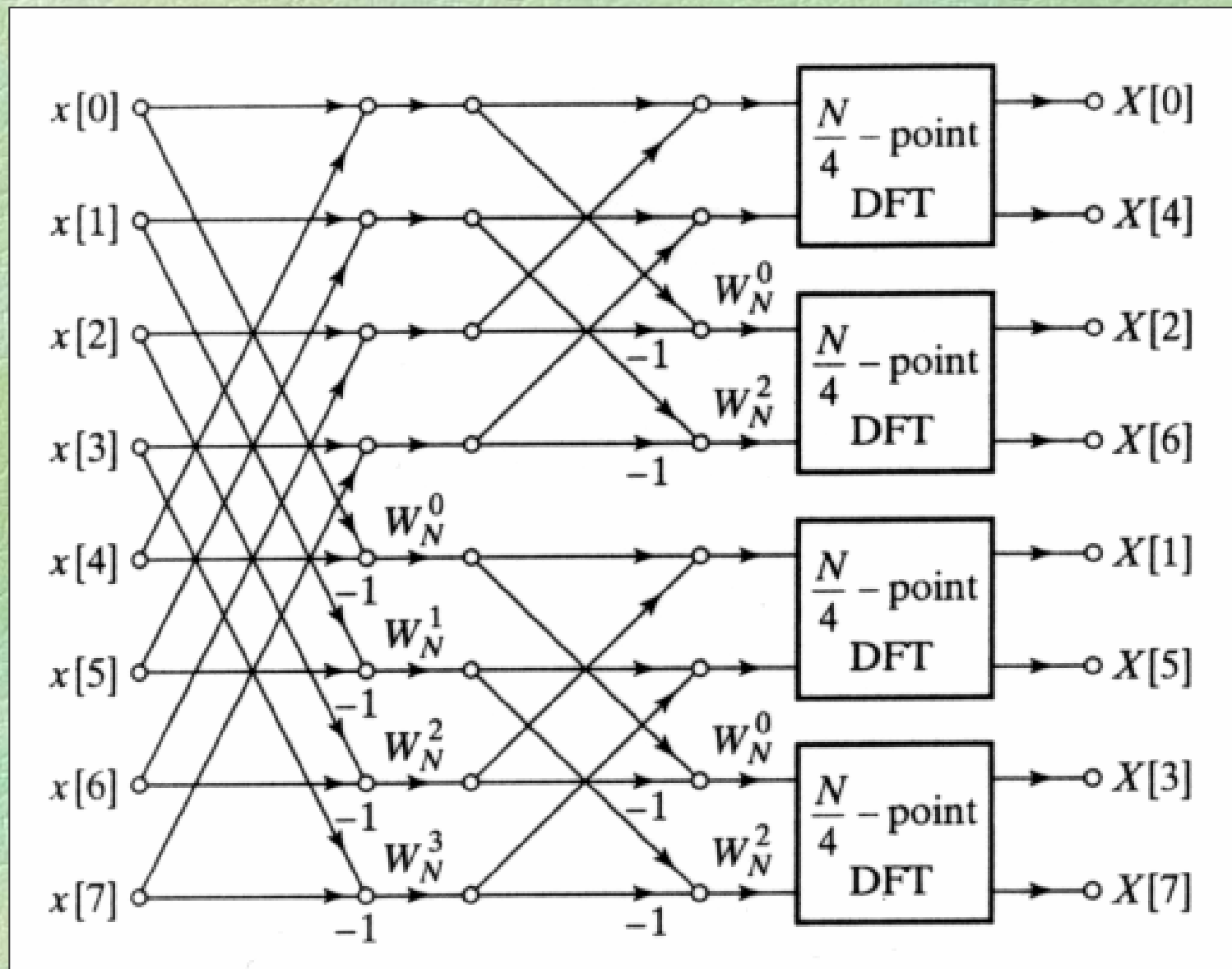
Podstawową „cegiełką” algorytmu **FFT** jest operacja motylkowa:

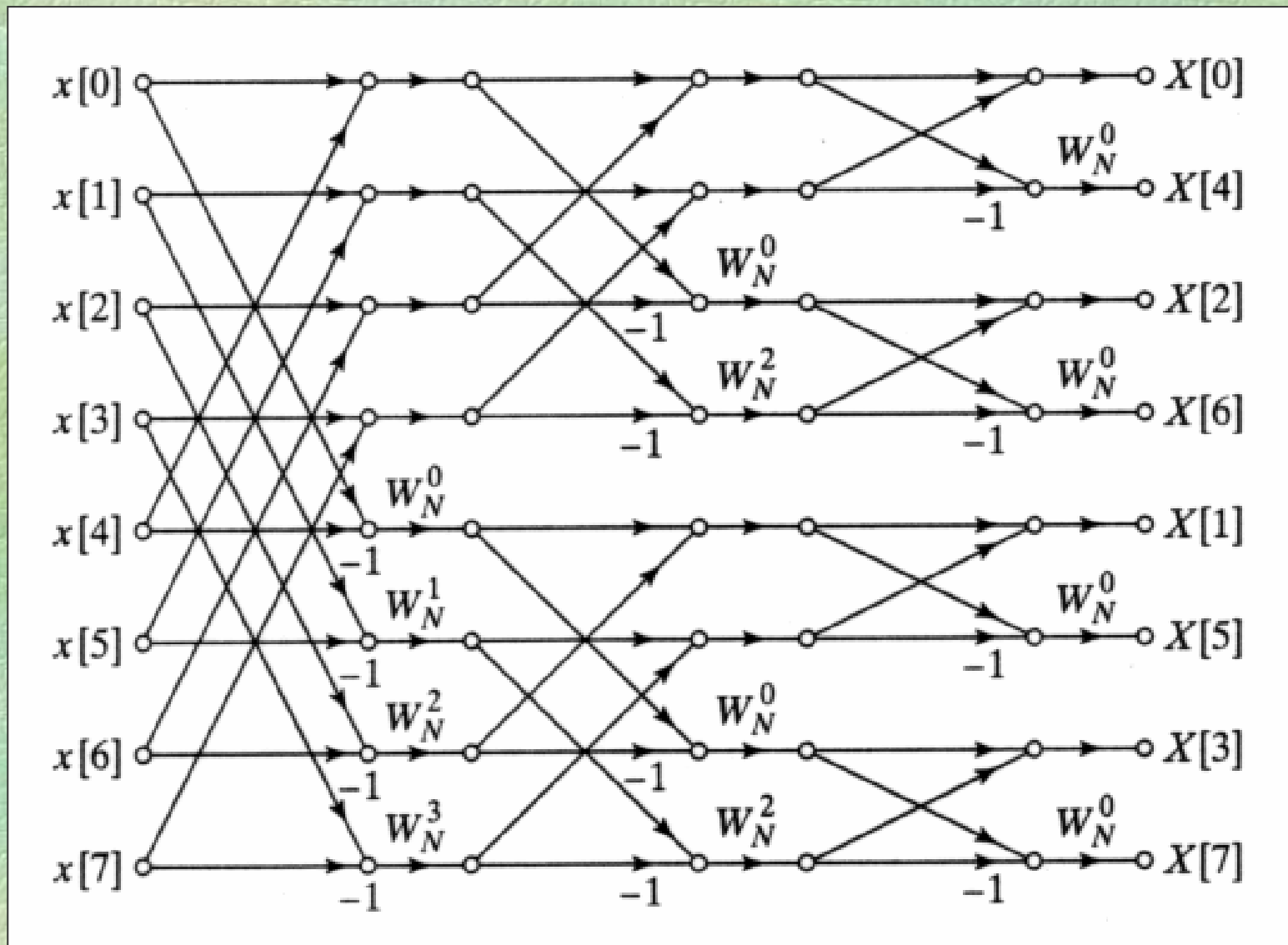


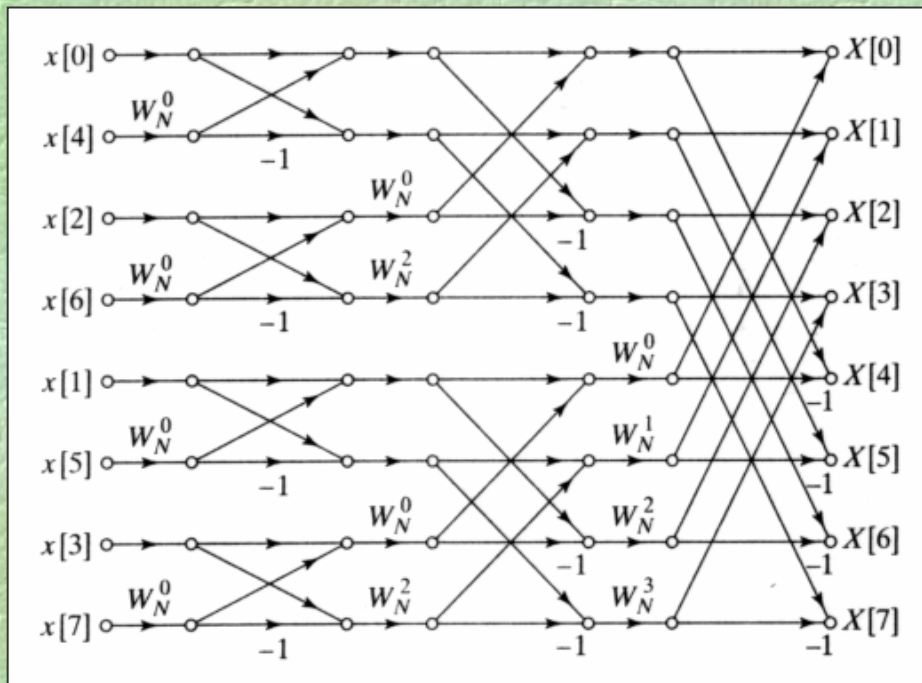
Flow graph of a 2-point DFT.



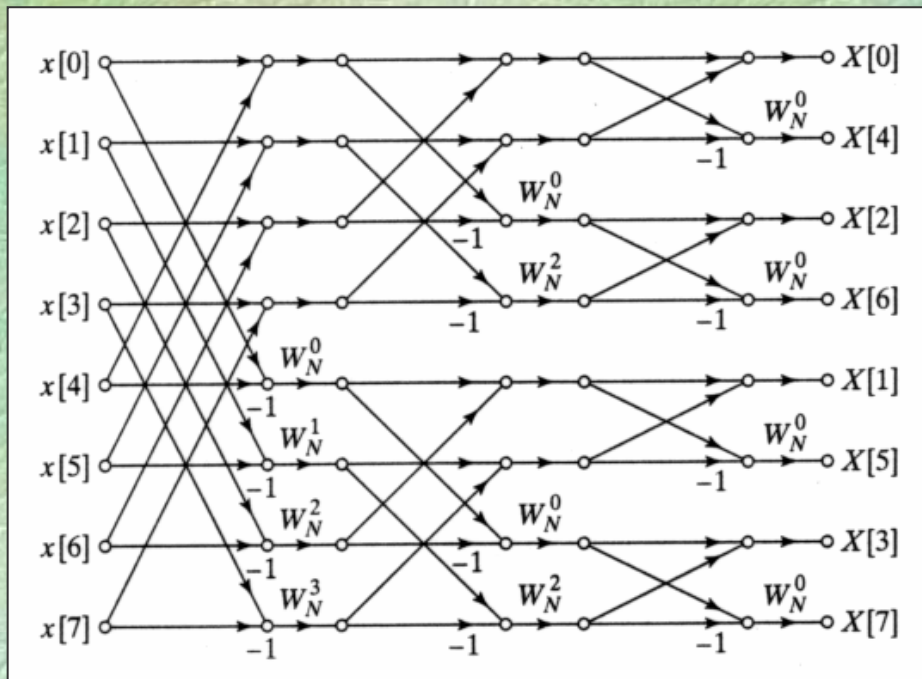






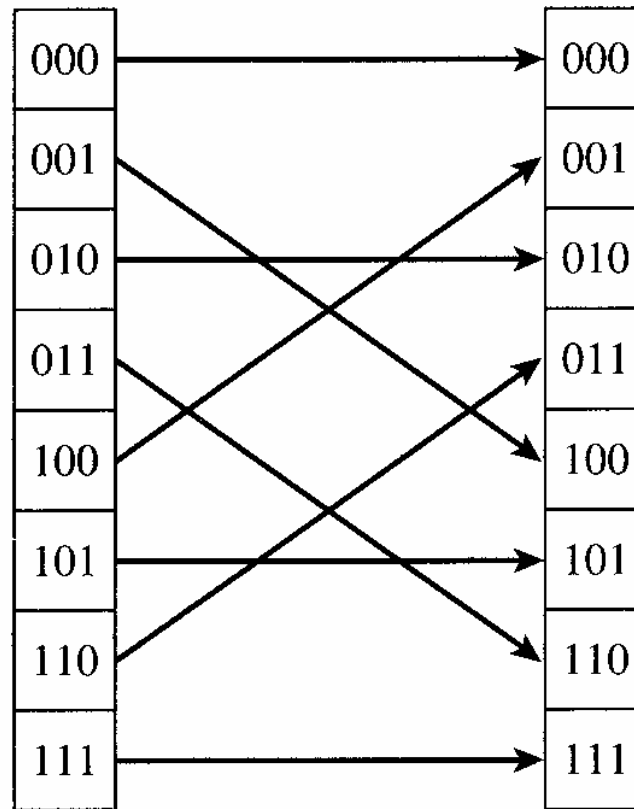


decymacja czasowa

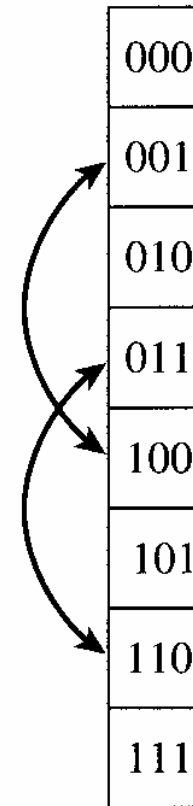


**decymacja
częstotliwościowa**

Adresacja bitowo-rewersyjna

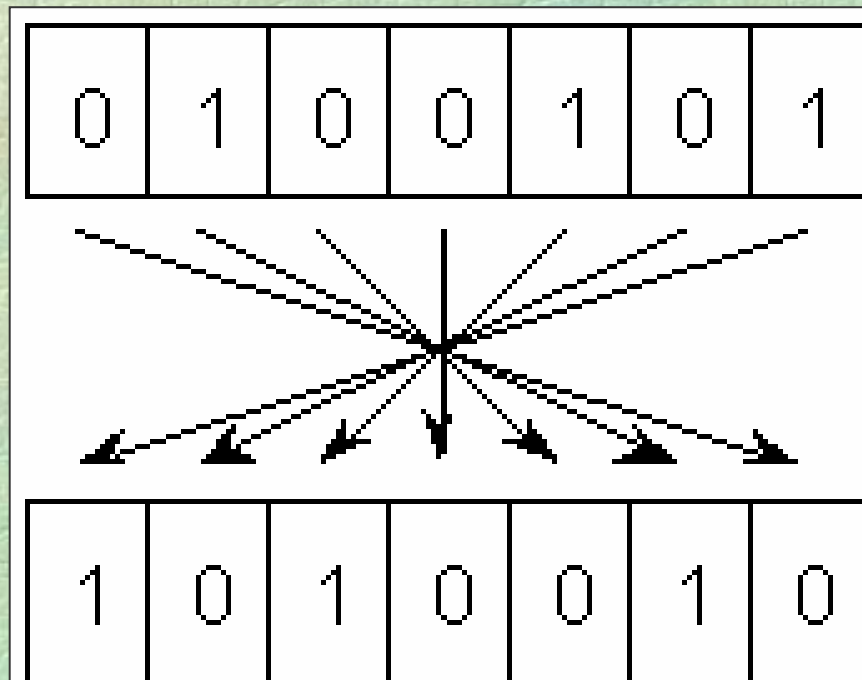
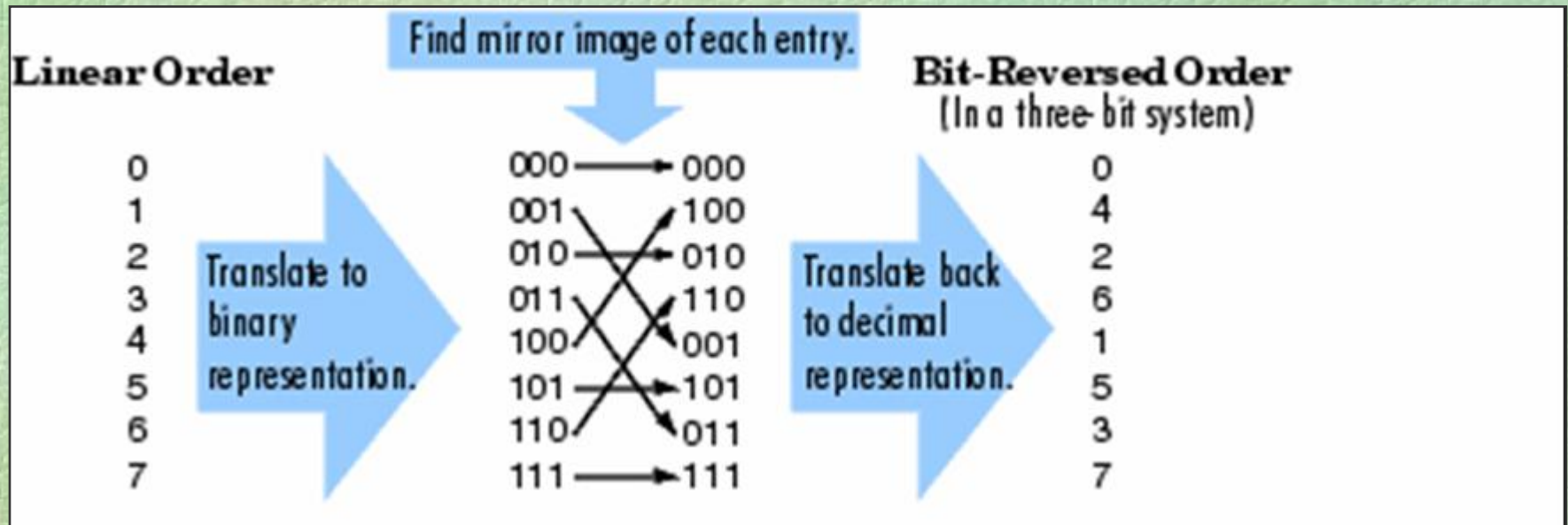


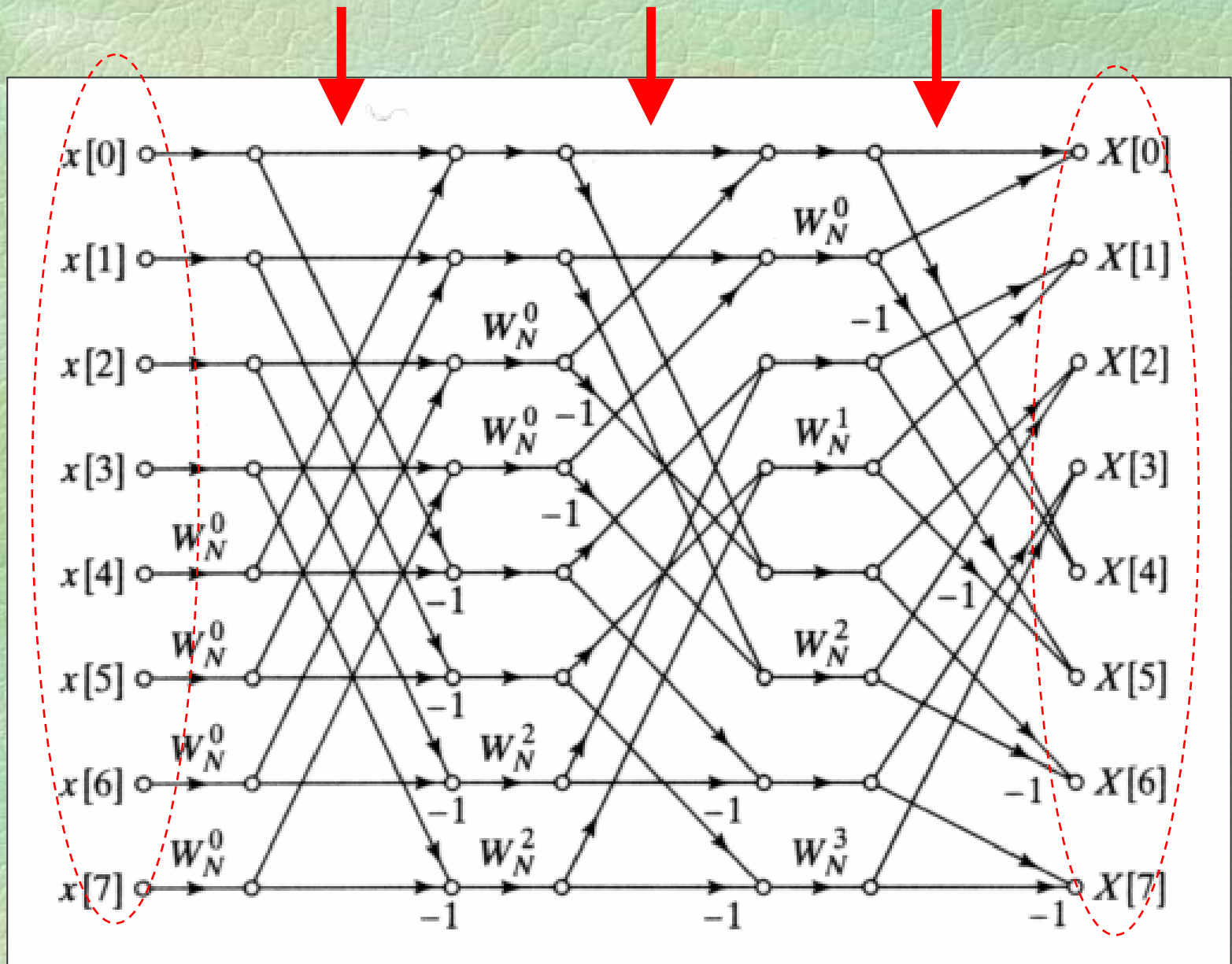
(a)

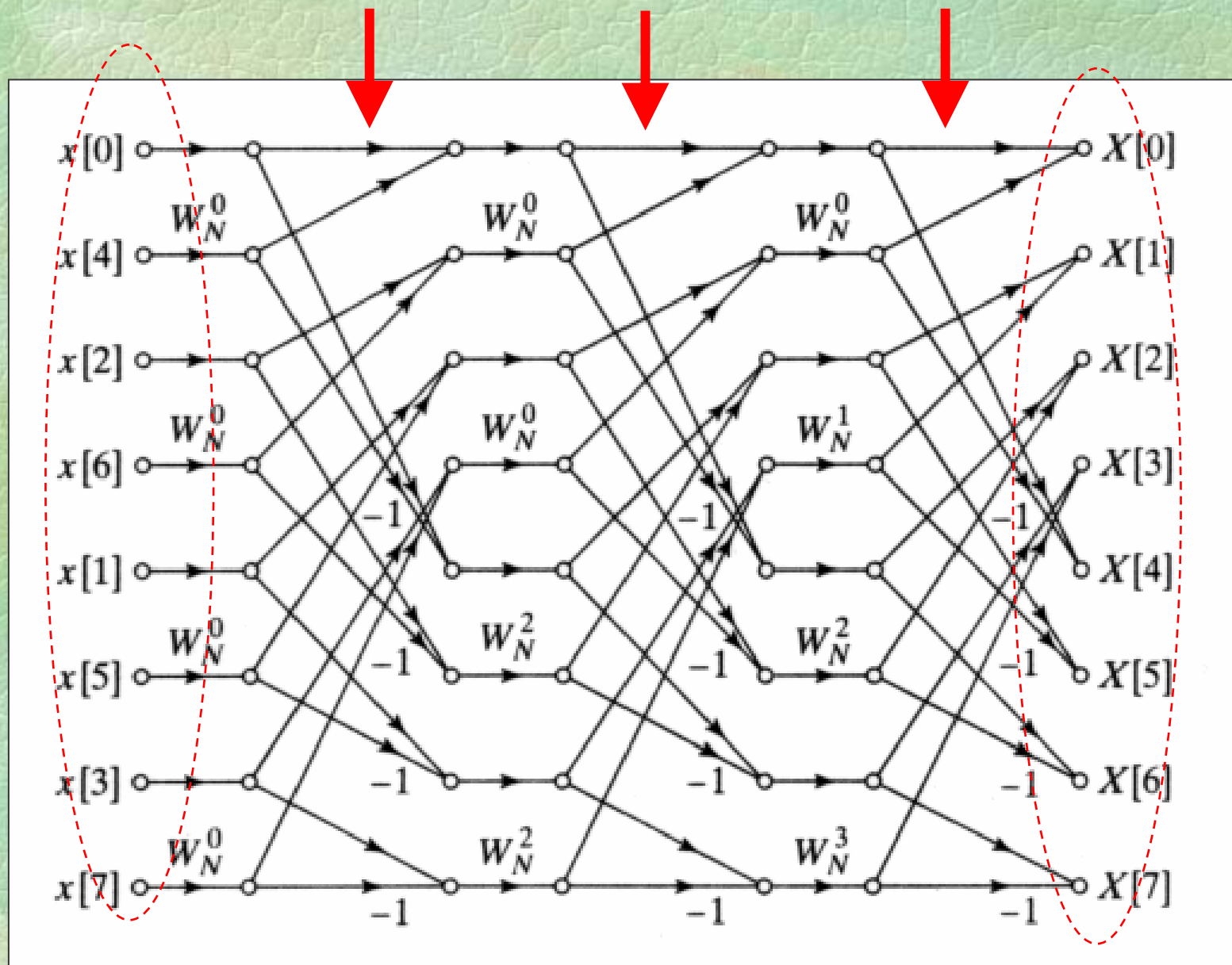


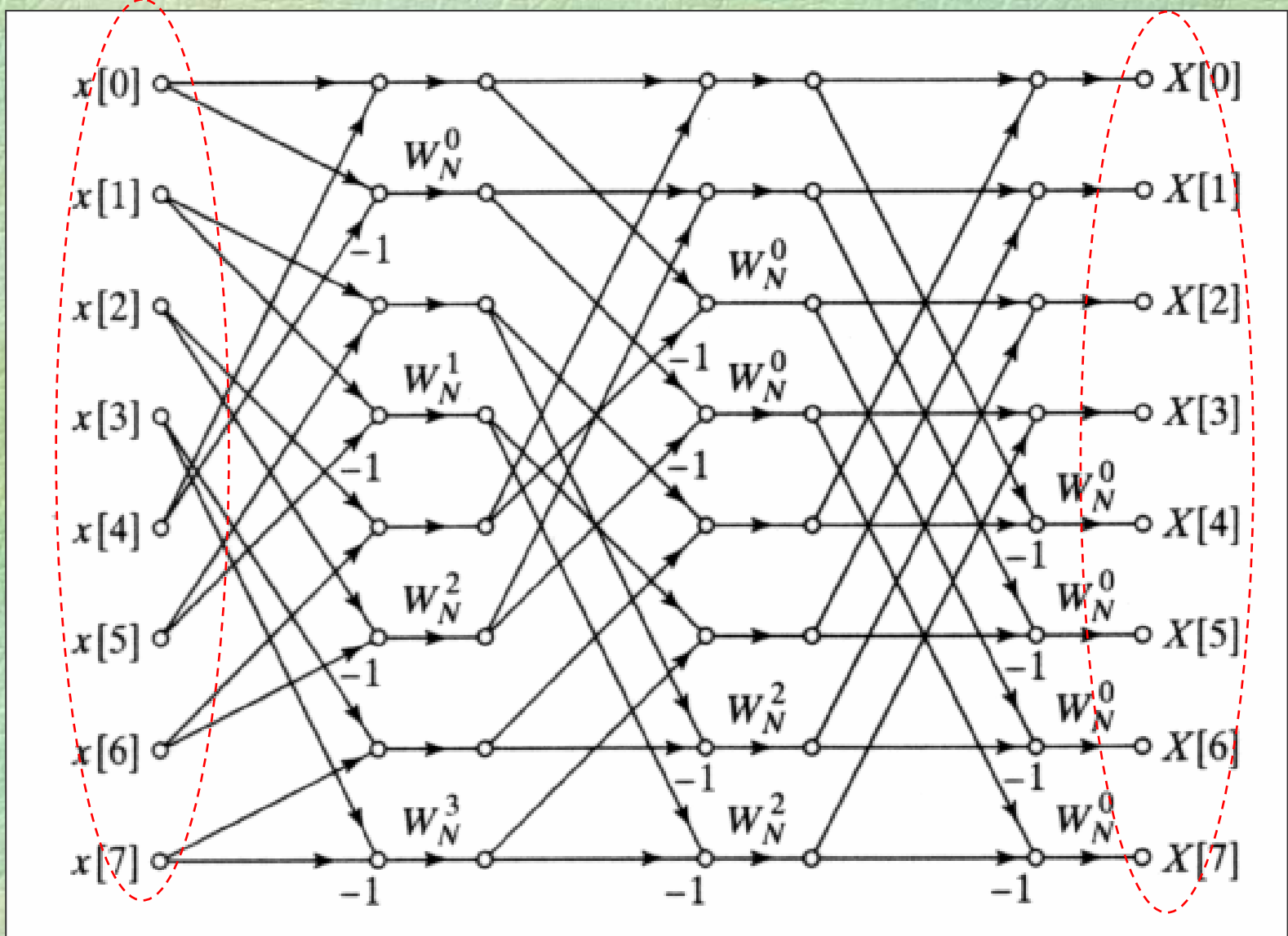
(b)

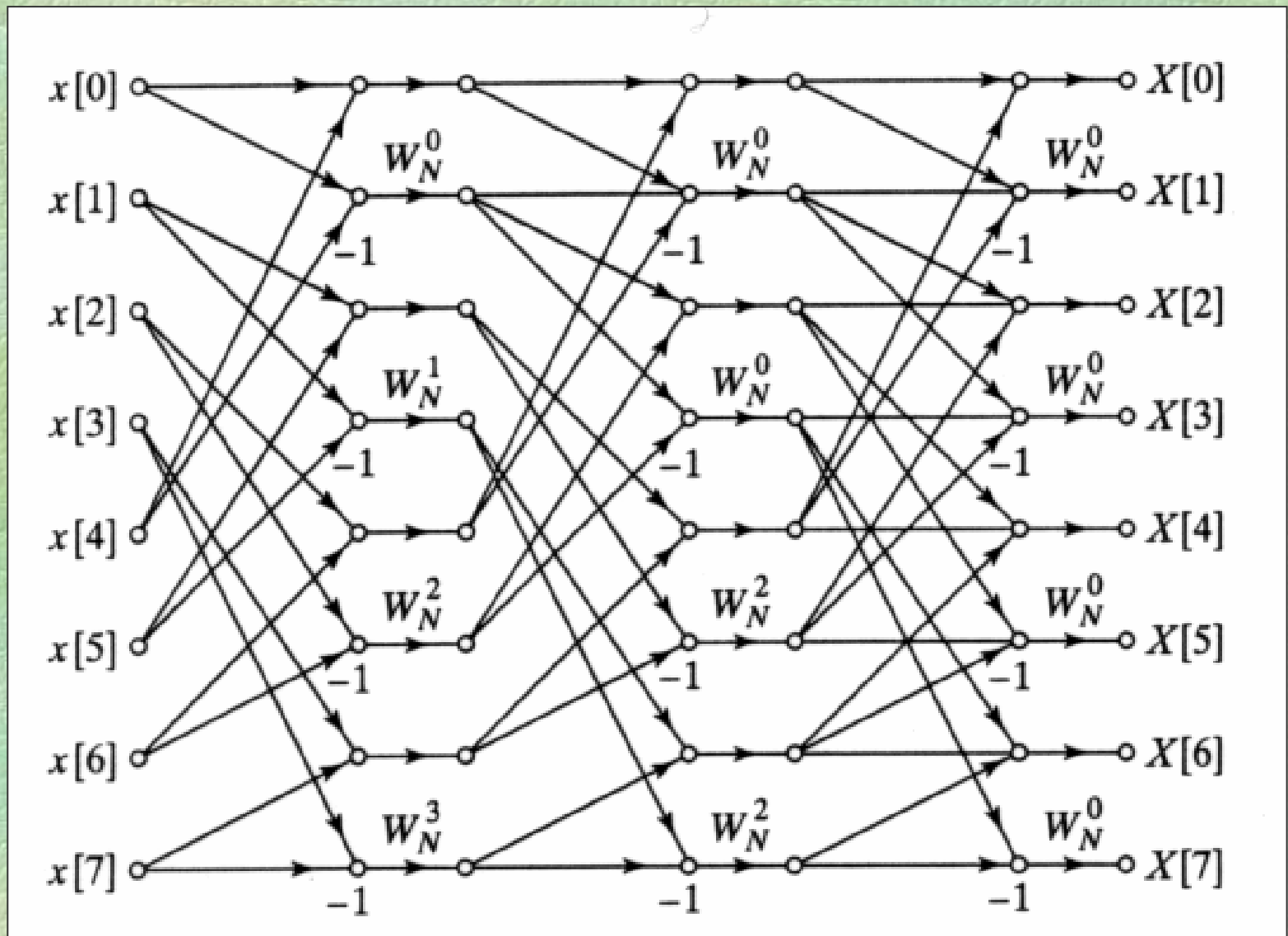












$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 & W^1 & W^5 & W^3 & W^7 \\ W^0 & W^0 & W^4 & W^4 & W^2 & W^2 & W^6 & W^6 \\ W^0 & W^4 & W^6 & W^2 & W^3 & W^7 & W^1 & W^5 \\ W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^4 & W^4 & W^4 & W^4 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 & W^3 & W^1 & W^7 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^4 & W^4 & W^6 & W^6 & W^2 & W^2 \\ W^0 & W^4 & W^6 & W^2 & W^7 & W^3 & W^5 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_4 \\ a_2 \\ a_6 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & . & . & W^0 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & W^1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & W^2 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & W^3 \\ 1 & . & . & W^4 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & W^5 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & W^6 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & W^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & W^0 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & W^2 & . & . & . \\ 1 & . & W^4 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & W^6 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & W^0 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & W^2 \\ . & . & . & . & 1 & W^4 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & W^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & W^0 & . & . & . & . & . \\ 1 & W^4 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & W^0 & . & . & . \\ . & . & 1 & W^4 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & W^0 & . \\ . & . & . & . & 1 & W^4 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & W^0 \\ . & . & . & . & . & 1 & W^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_4 \\ a_2 \\ a_6 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

Shmuel Winograd



r. 1976

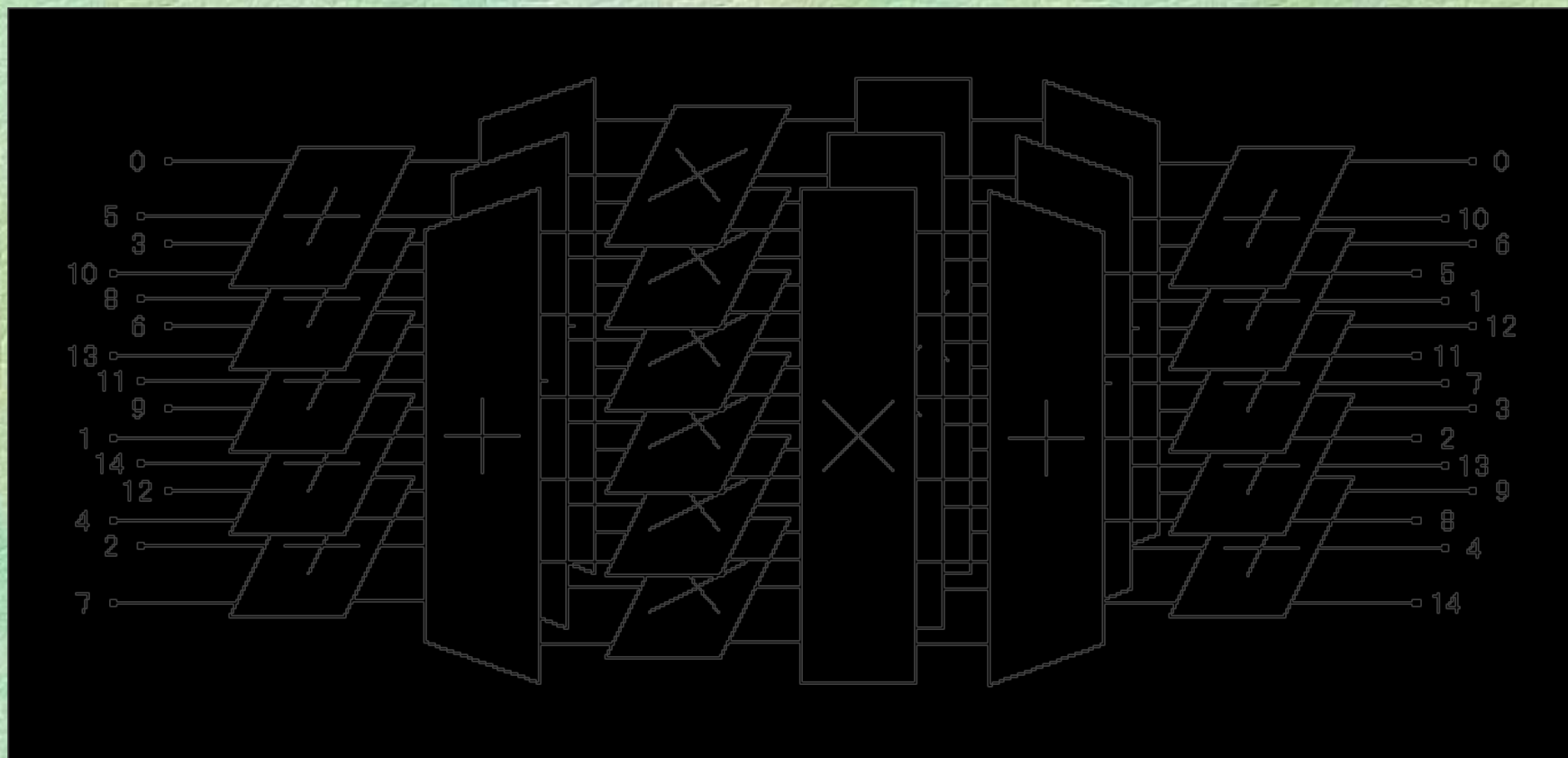




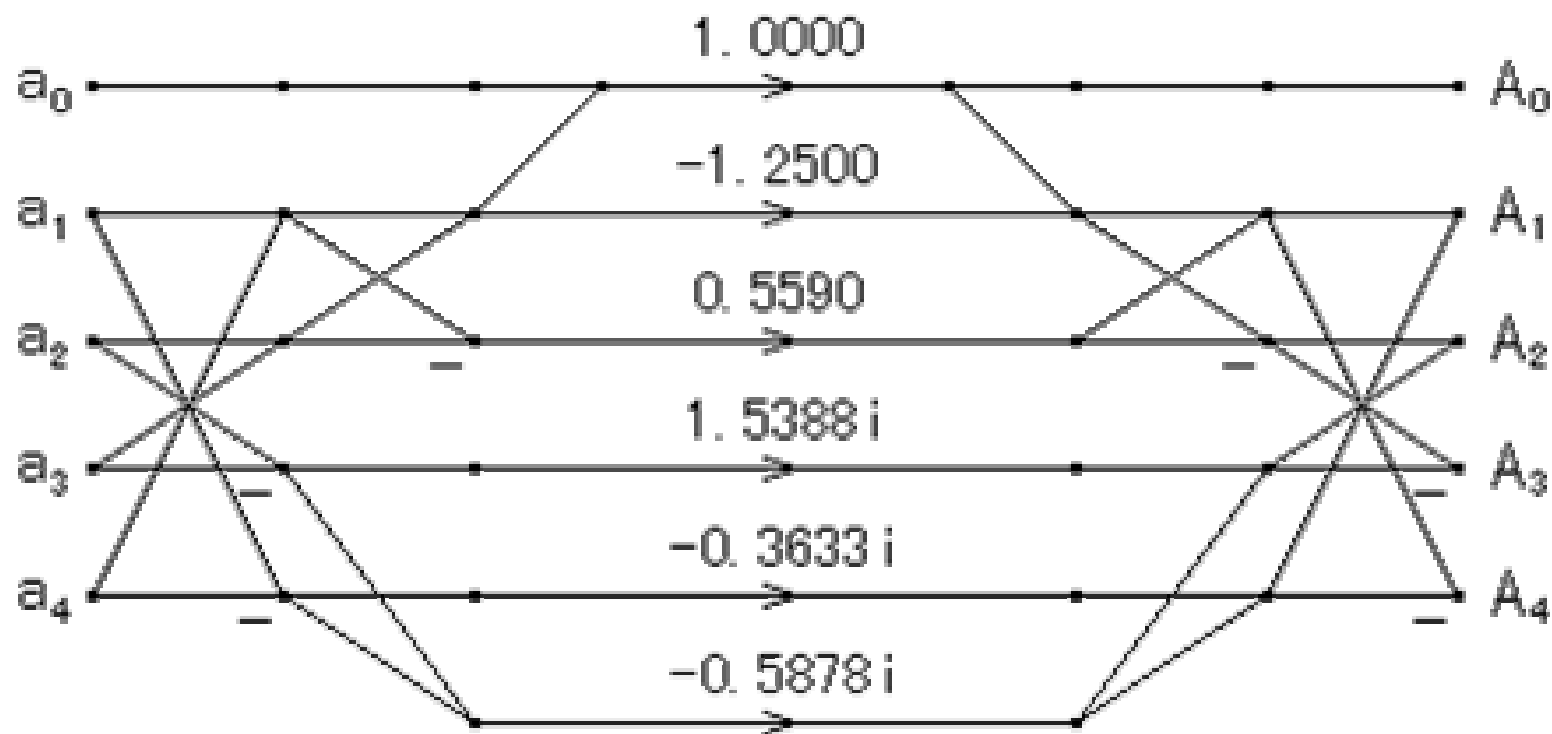
Struktura WFFT dla $N=15$



Struktura WFFT dla $N=15$



Algorytm WFFT dla $N=5$



Wielu wybitnych uczonych przyczyniło się do pogłębienia teoretycznej i praktycznej znajomości algorytmów FFT i licznymi swymi wynalazkami zbliżyło chwilę ich praktycznego zastosowania.



Ramesh C. Agarwal



Sidney Burrus



Thomas Parks

Naukowcy Politechniki Szczecińskiej, zajmujące się DSP



Ryszard Stasiński
Profesor PS



Georgi Kuchariew
Profesor PS



Alexander Tariov
Profesor PS