

# **Systemy przetwarzania sygnałów**

## ***Szybkie algorytmy dyskretnych transformat***



# **wykład No 7**



# Uogólnienie DFT

$$\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

Wybór bazy określa się względami praktycznej lub matematycznej wygody.

$$\mathbf{B} = \|b_{m,n}\|$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{B}_N \mathbf{X}$$

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$$



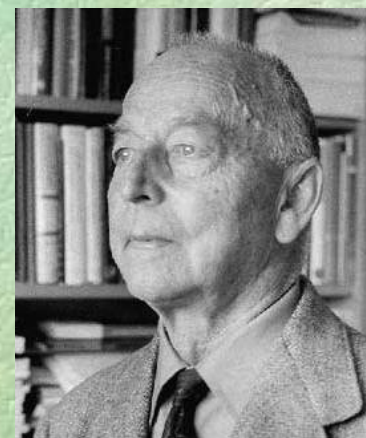
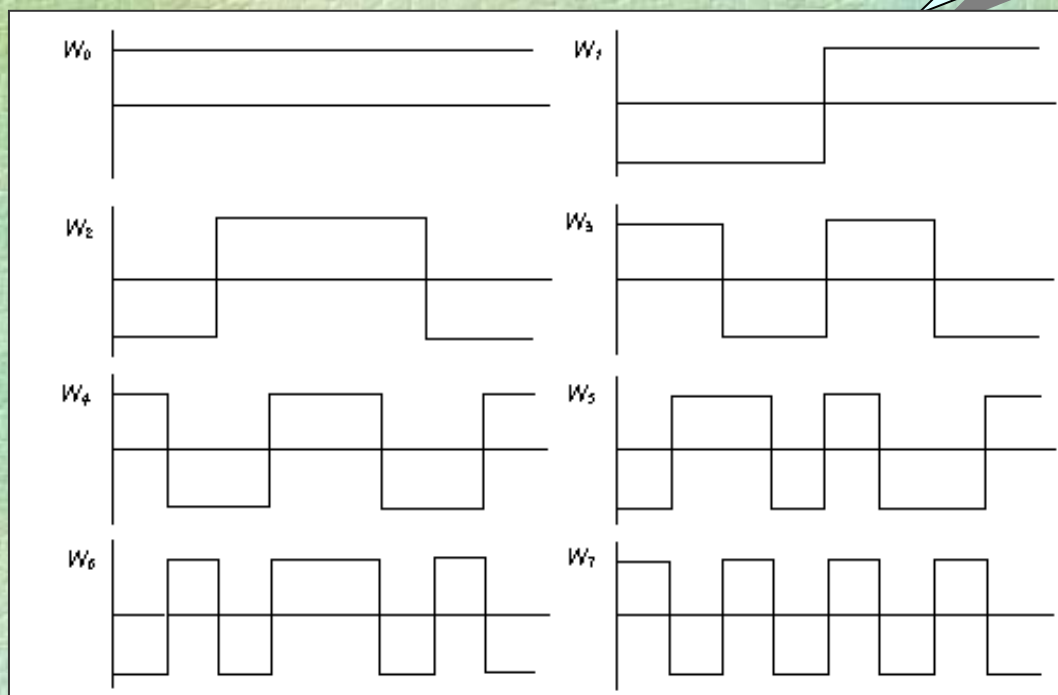
# Baza funkcji Walsha

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Walsh Tx can be constructed as

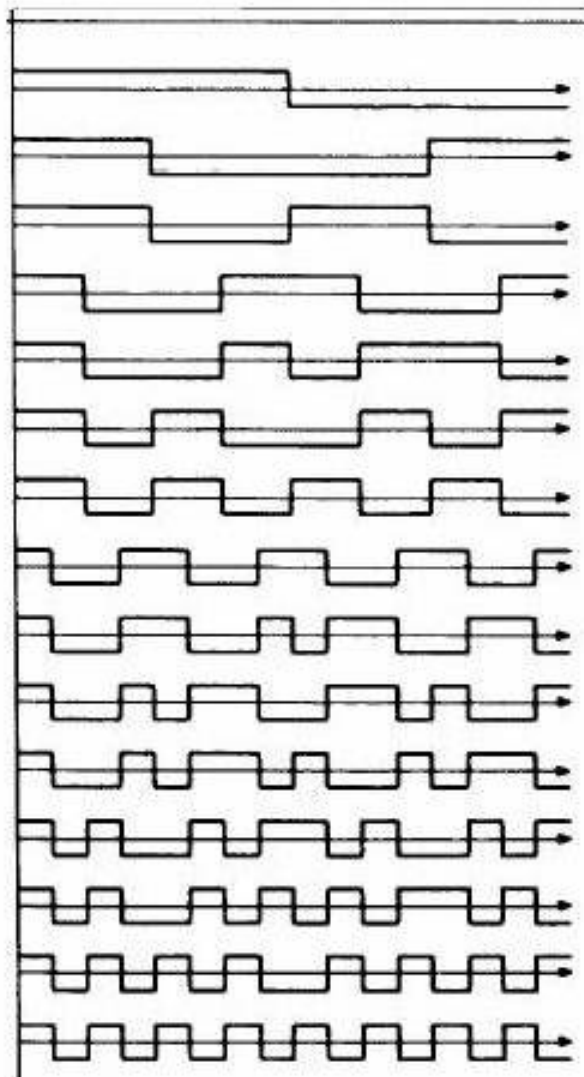
$$\mathbf{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{bmatrix}$$

Dyskretne funkcje  
Walsha stanowią próbki  
funkcji schodkowych.



Walsh Transform,  
 $N=8$

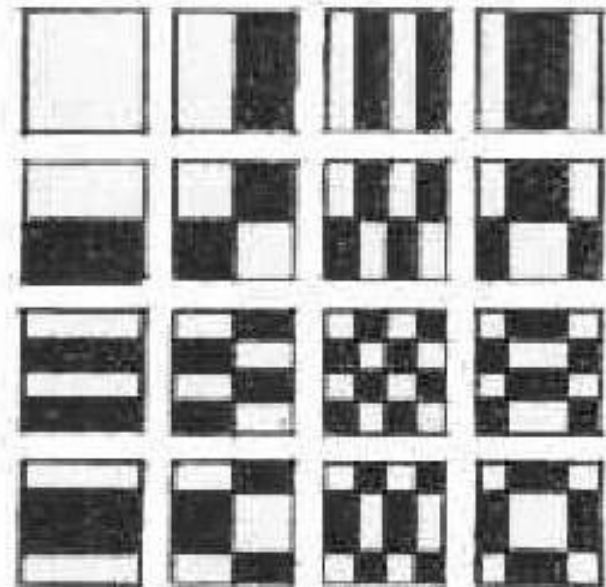
## Variations in Time



**Walsh functions**

## Variations in Space

The 15 hyperplanes of  $PG(3,2)$ , the smallest projective space:

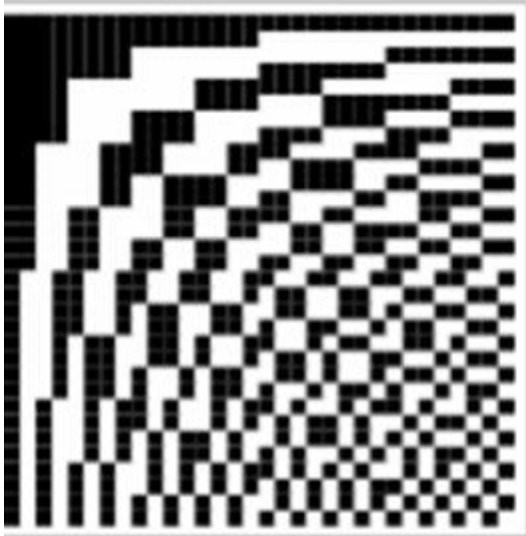


Trig functions are called "the circular functions" because they are derived from the circle. As the above shows, Walsh functions might therefore be called "THE square functions."

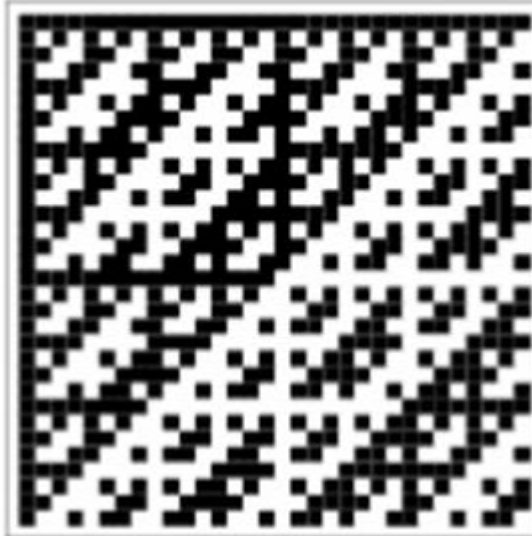


# Dwuwymiarowe funkcji Walsha

*sequency*



*natural or Hadamard*



*dyadic or Paley*



# Hadamard Transform

$$\mathbf{H}_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$



Jacques Salomon Hadamard,  
matematyk francuzki (1865-1963)



$$\mathbf{H}_8 = \begin{bmatrix} had(0,n) \\ had(1,n) \\ had(2,n) \\ had(3,n) \\ had(4,n) \\ had(5,n) \\ had(6,n) \\ had(5,n)7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Uporządkowanie  
naturalne  
(Hadamarda)**

$$\mathbf{W}_8 = \begin{bmatrix} wal(0,n) \\ wal(1,n) \\ wal(2,n) \\ wal(3,n) \\ wal(4,n) \\ wal(5,n) \\ wal(6,n) \\ wal(5,n)7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Uporządkowanie  
sekwencyjne**



Uporządkowanie  
według  
Paley'ego

$$\mathbf{P}_8 = \begin{bmatrix} pal(0,n) \\ pal(1,n) \\ pal(2,n) \\ pal(3,n) \\ pal(4,n) \\ pal(5,n) \\ pal(6,n) \\ pal(5,n)7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Faktoryzacja macierzy funkcji Walsha dla $N=8$

$$[W_8] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



# Baza funkcji Haara

$$\mathbf{H}_{2^k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{2^{(k-1)}} \otimes (1 & 1) \\ \sqrt{2^{(k-1)}} \mathbf{I}_{2^{(k-1)}} \otimes (1 & -1) \end{bmatrix}, \forall k = 2, 3, \dots$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

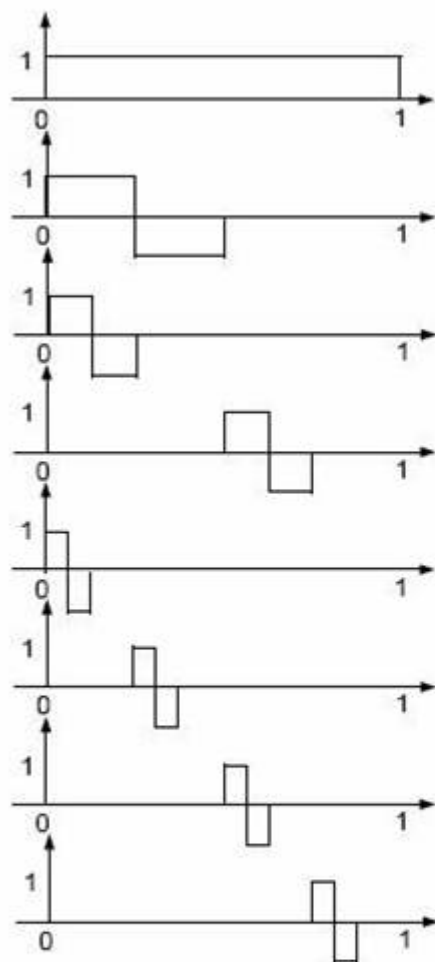
$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

# Haar Transform $\mathbf{H}_8$

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

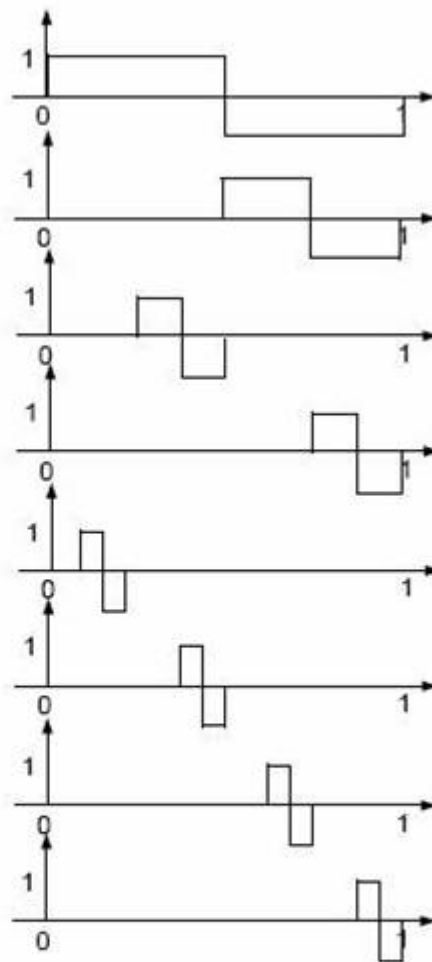


## Haar functions



$$I(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_{j,k} = H(2^j x - k)$$



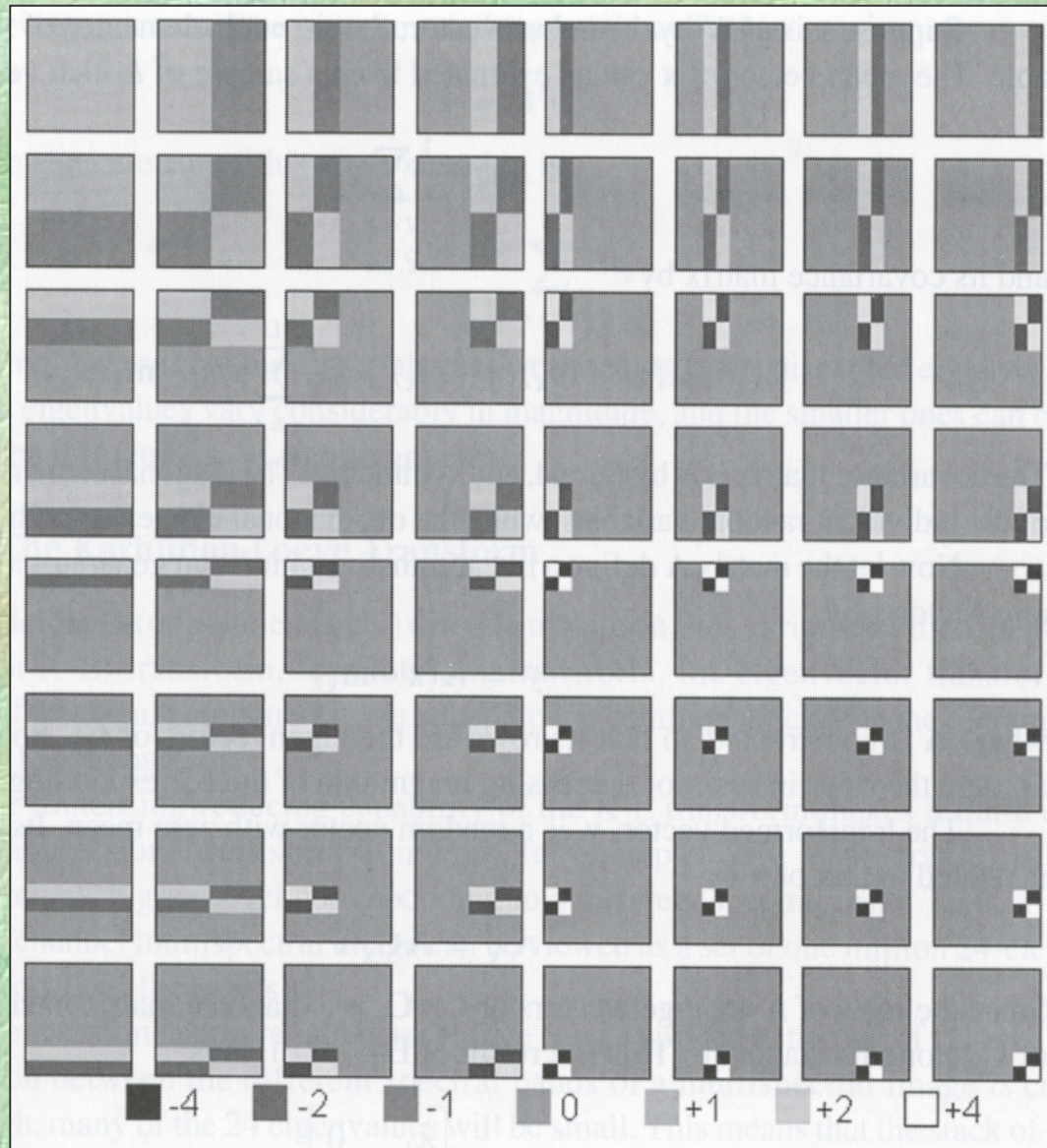
**Haar Transform:**

$$W_H f(j, k) = |J|^{1/2} \int f(x) H_{j,k} dx$$

at scale  $j$  and translation  $k$



# Dwuwymiarowe funkcje Haara







# **Alfréd Haar**

11.10.1885 w Budapest

16.03.1933 w Szeged

**Zajmował się badaniem funkcji ortogonalnych, różniczkowymi równaniami cząstkowymi, aproksymacją Chebyshev'a oraz nierównościami liniowymi.**

**W roku 1903 (to był jego ostatni rok w szkole), Haar zdobył swoją pierwszą nagrodę w dziedzinie matematyki.**

**W roku 1904 wyjechał do Niemiec (Göttingen), gdzie studiował pod kierownictwem Hilberta, broniąc doktorat w roku 1909.**



## **Alfréd Haar**

11.10.1885 w Budapest

16.03.1933 w Szeged

**Haar studiował w Göttingen do 1912. Później wrócił na Węgry i został pracować na uniwersytecie w Kolozsvár (obecnie nazywa się Cluj w Rumunii), na uniwersytecie w Budapest.**

**Po Pierwszej Wojnie Światowej, kiedy Kolozsvár stał się rumuńskim, Haar wyjechał do Szeged, gdzie wtedy jeszcze uniwersytetu nie było. Haar, razem z Riesz'em, organizują centrum matematyczne dla przyszłego Uniwersytetu.**



# Baza funkcji piłopodobnych (Slant function)

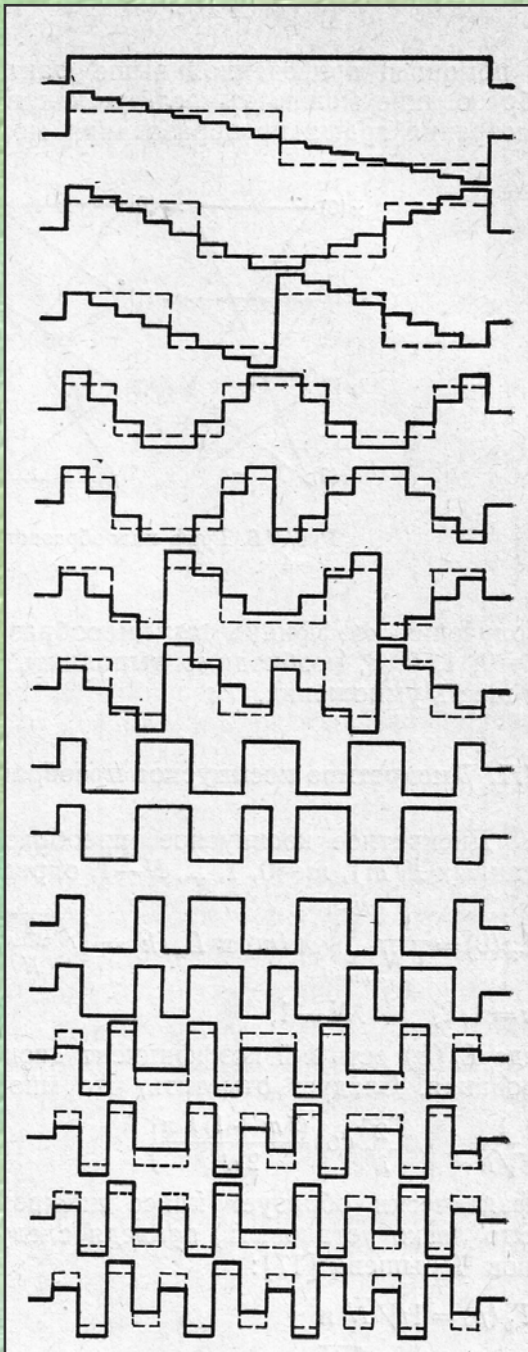
$$\mathbf{S}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ a_N & b_N & & -a_N & b_N & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} & \mathbf{0} & & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} \\ 0 & 1 & & 0 & -1 & \\ -b_N & a_N & \mathbf{0} & b_N & a_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} & \mathbf{0} & & -\mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}$$

$$a_2 = 1$$

$$\text{dla } N \geq 4 \quad b_N = [1 + 4(a_{N/2})^2]^{-\frac{1}{2}}, a_N = 2b_N a_{N/2}$$

## Wykresy przebiegów funkcji **Slant** dla $N=16$

Dla porównania linią  
przerwaną pokazano przebiegi  
funkcji Walsh.





# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie DEF

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{B}_N \mathbf{X}$$

$$\mathbf{B} = \|b_{m,n}\|$$

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} w_2^0 & w_2^0 \\ w_2^0 & w_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{E}_N \mathbf{X}$$

$$w_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} w_3^0 & w_3^0 & w_3^0 \\ w_3^0 & w_3^1 & w_3^2 \\ w_3^0 & w_3^2 & w_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3^1 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3^1 \end{bmatrix}$$

$$w_N^{kn} = w_N^{(kn) \bmod N}$$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4^1 & w_4^2 & w_4^3 \\ w_4^0 & w_4^2 & w_4^0 & w_4^2 \\ w_4^0 & w_4^3 & w_4^2 & w_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix}$$

$$N = r^m, r \geq 3$$

$$N = 2^m$$

$$N = r_0 r_1 \dots r_m$$



$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{D}^{(m)} \dots \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{D}^{(1)} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{X})$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{S}^T (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{W}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{X})$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{I}_{r_{i+1} \dots r_{m+1}} \otimes \mathbf{E}_{r_i} \otimes \mathbf{I}_{r_0 \dots r_{i-1}} & dla \ N = r_0 r_1 \dots r_{m+1} \\ \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}} & dla \ N = r^m, r \geq 3 \\ \mathbf{I}_{2^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{i-1}} & dla \ N = 2^m, m > 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{D}^{(m)} \dots \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{D}^{(1)} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{X})$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{S}^T (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{W}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{X})$$

$$\mathbf{D}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{I}_{r_{i+1} \dots r_{m+1}} \otimes \mathbf{D}_{(r_0 \dots r_{i-1}) r_i} & dla \ N = r_0 r_1 \dots r_{m+1} \\ \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{D}_{r^i} & dla \ N = r^m, r \geq 3 \\ \mathbf{I}_{2^{m-i}} \otimes \mathbf{D}_{2^i} & dla \ N = 2^m, \end{cases}$$



$$\mathbf{D}_{R \cdot r} = \text{diag}[\mathbf{I}_R, (1, w_{R \cdot r}^1, \dots, w_{R \cdot r}^{R-1}), \dots, (1, w_{R \cdot r}^{(r-1)}, \dots, w_{R \cdot r}^{(r-1)(R-1)})]$$

$$w_{R \cdot r} = \exp(-j2\pi / R \cdot r)$$

$$R = \begin{cases} r_0 r_1 \cdots r_{i-1} & \text{dla } N = r_0 r_1 \cdots r_m r_{m+1} \\ r^{i-1} & \text{dla } N = r^m \\ 2^{i-1} & \text{dla } N = 2^m \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{D}^{(m)} \dots \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{D}^{(1)} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{X})$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{S}^T (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{W}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{X})$$

$$\mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{S}_{r^m} & dla\ N = r^m, r \geq 3 \\ \mathbf{S}_{2^m} & dla\ N = 2^m \\ \mathbf{S}_{r_1 r_2 \dots r_m} & dla\ N = r_0 r_1 \dots r_m \end{cases}$$



$$\mathbf{S}_{r^m}$$

- macierz inwersji  $r$ -narnej rzędu  $N=r^m$   
z elementami:

$$S_{k+1, \langle n \rangle_r + 1} = \begin{cases} 1, & \text{przy } k = n \in \overline{0, N-1} \\ 0, & \text{przy } k \neq n \end{cases}$$

$$\langle n \rangle_r$$

- reprezentacja liczby  $n$  za pomocą  $r$ - narnej notacji według prawa:

jeśli

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} n_i r^i$$

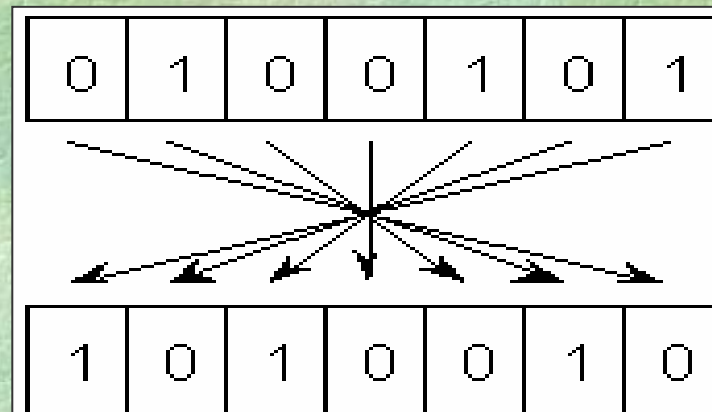
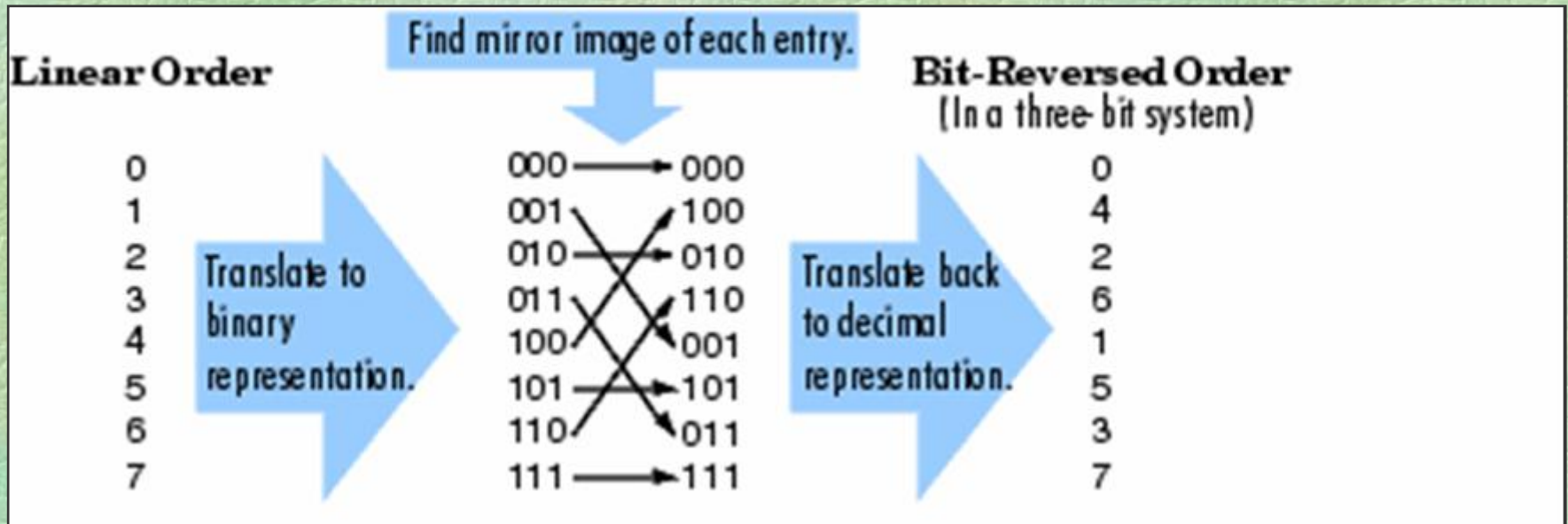
wówczas

$$\langle n \rangle_r = \sum_{i=0}^{m-1} n_{m-1-i} r^i$$

$$n_i = \overline{0, r-1}$$

# Przypadek szczególny: ( $r = 2$ )

## - adresacja bitowo-rewersyjna





# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie DEF dla $N=r^m$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{r^m} \mathbf{S}_{r^m} (\mathbf{D}_{r^m}^{(1)} \mathbf{W}_{r^m}^{(1)} \dots \mathbf{D}_{r^m}^{(m)} \mathbf{W}_{r^m}^{(m)} \mathbf{X})$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{r^m} \mathbf{W}_{r^m}^{(m)} \mathbf{D}_{r^m}^{(1)} \dots \mathbf{W}_{r^m}^{(1)} \mathbf{D}_{r^m}^{(1)} (\mathbf{S}_{r^m} \mathbf{X})$$

$$\mathbf{D}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{D}_{r^i}$$

$$\mathbf{D}_{r^i} = \text{diag}[\mathbf{I}_R, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{R-1}), \dots, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{(r-1)(R-1)})]$$

$$\mathbf{W}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}}$$

$$\mathbf{R} = r^{i-1}, w_{r^i} = \exp(-j2\pi / r^i); i = \overline{1, m}$$



# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie DEF dla $N=r^2=2^3$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2^3} \mathbf{S}_{2^3} \mathbf{W}_{2^3}^{(1)} \mathbf{D}_{2^3}^{(2)} \mathbf{W}_{2^3}^{(2)} \mathbf{D}_{2^3}^{(3)} \mathbf{W}_{2^3}^{(3)} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{W}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}}$$

$$\mathbf{W}_{2^3}^{(3)} = 1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{2^3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{D}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{D}_{r^i}$$

$$\mathbf{D}_{r^i} = \text{diag}[\mathbf{I}_R, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{R-1}), \dots, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{(r-1)(R-1)})]$$

$$\mathbf{D}_{2^3}^{(3)} = 1 \otimes \mathbf{D}_{2^3} = \text{diag}(\mathbf{I}_4, 1, w_8^1, w_8^2, w_8^3)$$

$$\mathbf{D}_{2^3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & w_8^1 & & \\ & & & & & & w_8^2 & \\ & & & & & & & w_8^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = r^{i-1}$$

$$w_{r^i} = \exp(-j2\pi / r^i)$$

$$i = \overline{1, m}$$

$$\mathbf{W}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}}$$

$$\mathbf{W}_{2^3}^{(2)} = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_2 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_2 & \\ \hline & \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{W}_{2^3}^{(2)} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ \hline 1 & & -1 & & & & \\ & 1 & & -1 & & & \\ \hline & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 & & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{array} \right]$$



$$\mathbf{D}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{D}_{r^i}$$

$$\mathbf{D}_{r^i} = \text{diag}[\mathbf{I}_R, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{R-1}), \dots, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{(r-1)(R-1)})]$$

$$\mathbf{D}_{2^3}^{(2)} = \mathbf{I}_2 \otimes \text{diag}(\mathbf{I}_2, 1, w_8^2)$$

$$\mathbf{D}_{2^3}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & w_8^2 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & w_8^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = r^{i-1}$$

$$w_{r^i} = \exp(-j2\pi / r^i)$$

$$i = \overline{1, m}$$

$$\mathbf{W}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}}$$

$$\mathbf{W}_{2^3}^{(1)} = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{E}_2 = \text{diag}(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2)$$

$$\mathbf{W}_{2^3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{D}_{r^m}^{(i)} = \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{D}_{r^i}$$

$$\mathbf{D}_{r^i} = \text{diag}[\mathbf{I}_R, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{R-1}), \dots, (w_{r^i}^0, \dots, w_{r^i}^{(r-1)(R-1)})]$$

$$\mathbf{D}_{2^3}^{(1)} = \mathbf{I}_4 \otimes \text{diag}(\mathbf{I}_1, w_2^0) = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_8$$

$$\mathbf{D}_{2^3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = r^{i-1}$$

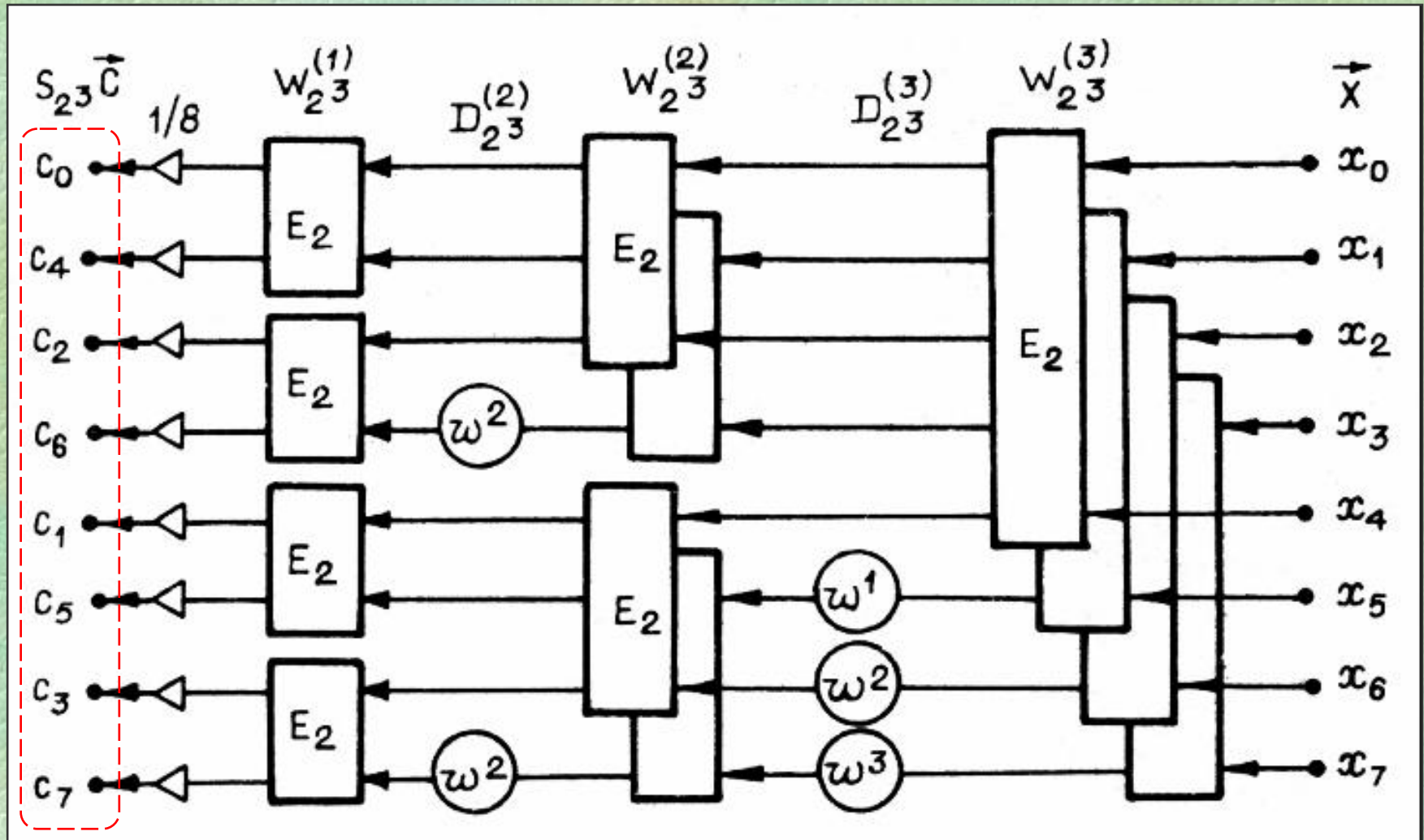
$$w_{r^i} = \exp(-j2\pi / r^i)$$

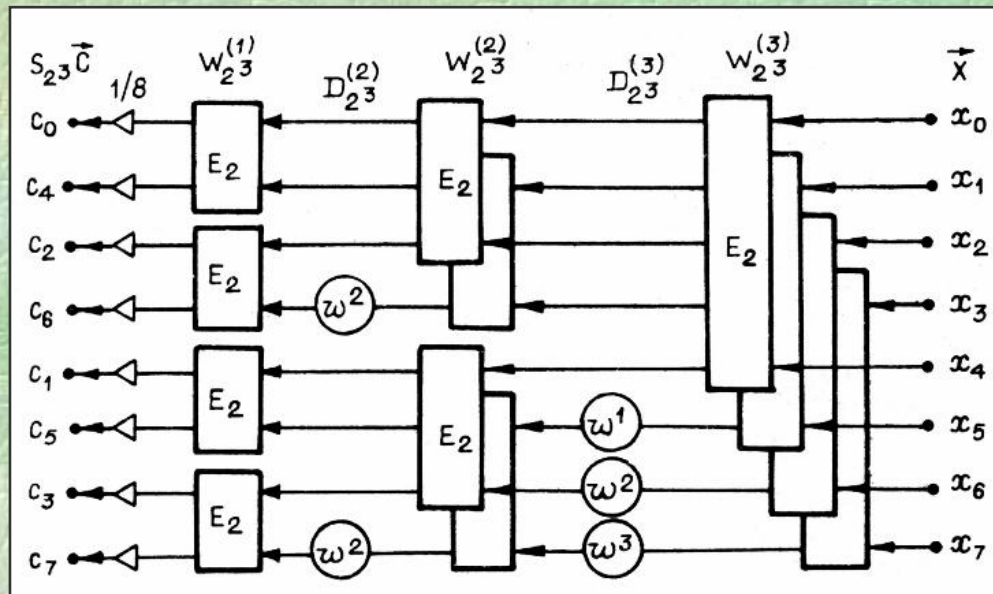
$$i = \overline{1, m}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} = & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1 \ 1} & & & & & & \\ \boxed{1 \ -1} & & & & & & \\ & \boxed{1 \ 1} & & & & & \\ & \boxed{1 \ -1} & & & & & \\ & & \boxed{1 \ 1} & & & & \\ & & \boxed{1 \ -1} & & & & \\ & & & \boxed{1 \ 1} & & & \\ & & & \boxed{1 \ -1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & w_8^2 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & w_8^2 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} \boxed{1 \ 1} & & & & & & \\ \boxed{1 \ -1} & & & & & & \\ & \boxed{1 \ 1} & & & & & \\ & \boxed{1 \ -1} & & & & & \\ & & \boxed{1 \ 1} & & & & \\ & & \boxed{1 \ -1} & & & & \\ & & & \boxed{1 \ 1} & & & \\ & & & \boxed{1 \ -1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & w_8^1 & \\ & & & & & & w_8^2 \\ & & & & & & & w_8^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1 \ 1} & & & & & & \\ \boxed{1 \ -1} & & & & & & \\ & \boxed{1 \ 1} & & & & & \\ & \boxed{1 \ -1} & & & & & \\ & & \boxed{1 \ 1} & & & & \\ & & \boxed{1 \ -1} & & & & \\ & & & \boxed{1 \ 1} & & & \\ & & & \boxed{1 \ -1} & & & \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}
 \end{aligned}$$



# Graf FFT dla $N=2^3$

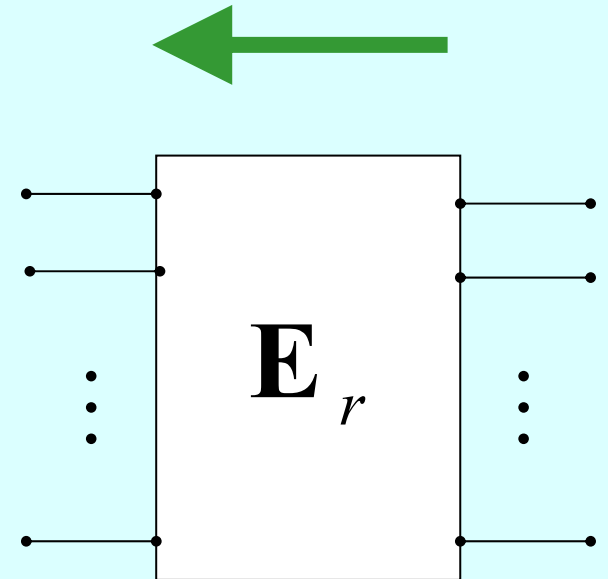
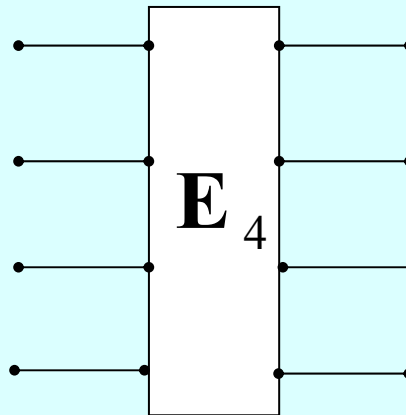
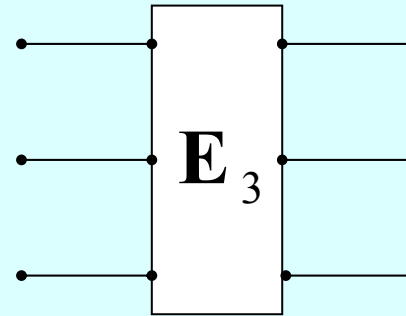
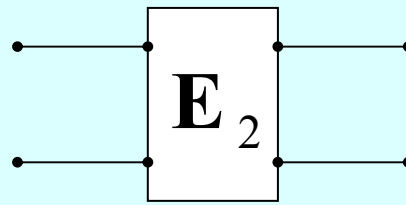
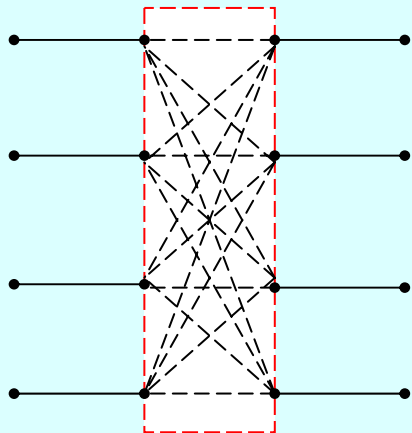
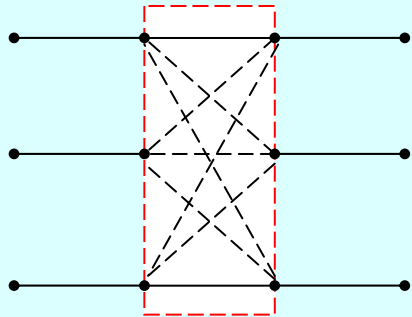
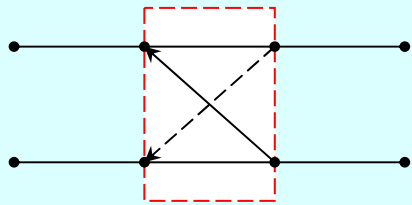




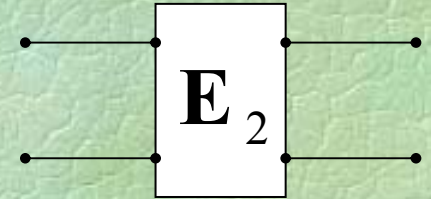
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & w_8^2 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & w_8^2 \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & w_8^1 & & \\ & & & & & & w_8^2 & \\ & & & & & & & w_8^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}$$



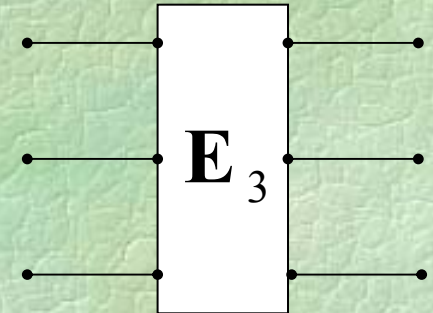
# Moduły realizujące FFT w bazie DEF dla różnych „ $r$ ”



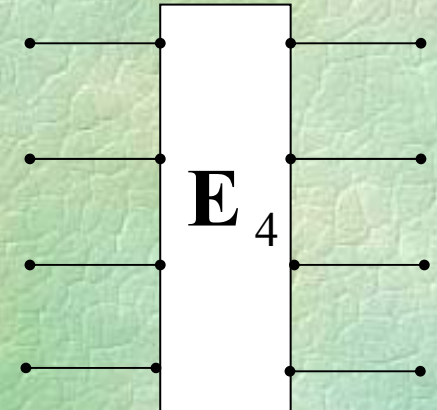
$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} w_2^0 & w_2^0 \\ w_2^0 & w_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} w_3^0 & w_3^0 & w_3^0 \\ w_3^0 & w_3^1 & w_3^2 \\ w_3^0 & w_3^2 & w_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3^1 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3^1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4^1 & w_4^2 & w_4^3 \\ w_4^0 & w_4^2 & w_4^0 & w_4^2 \\ w_4^0 & w_4^3 & w_4^2 & w_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix}$$

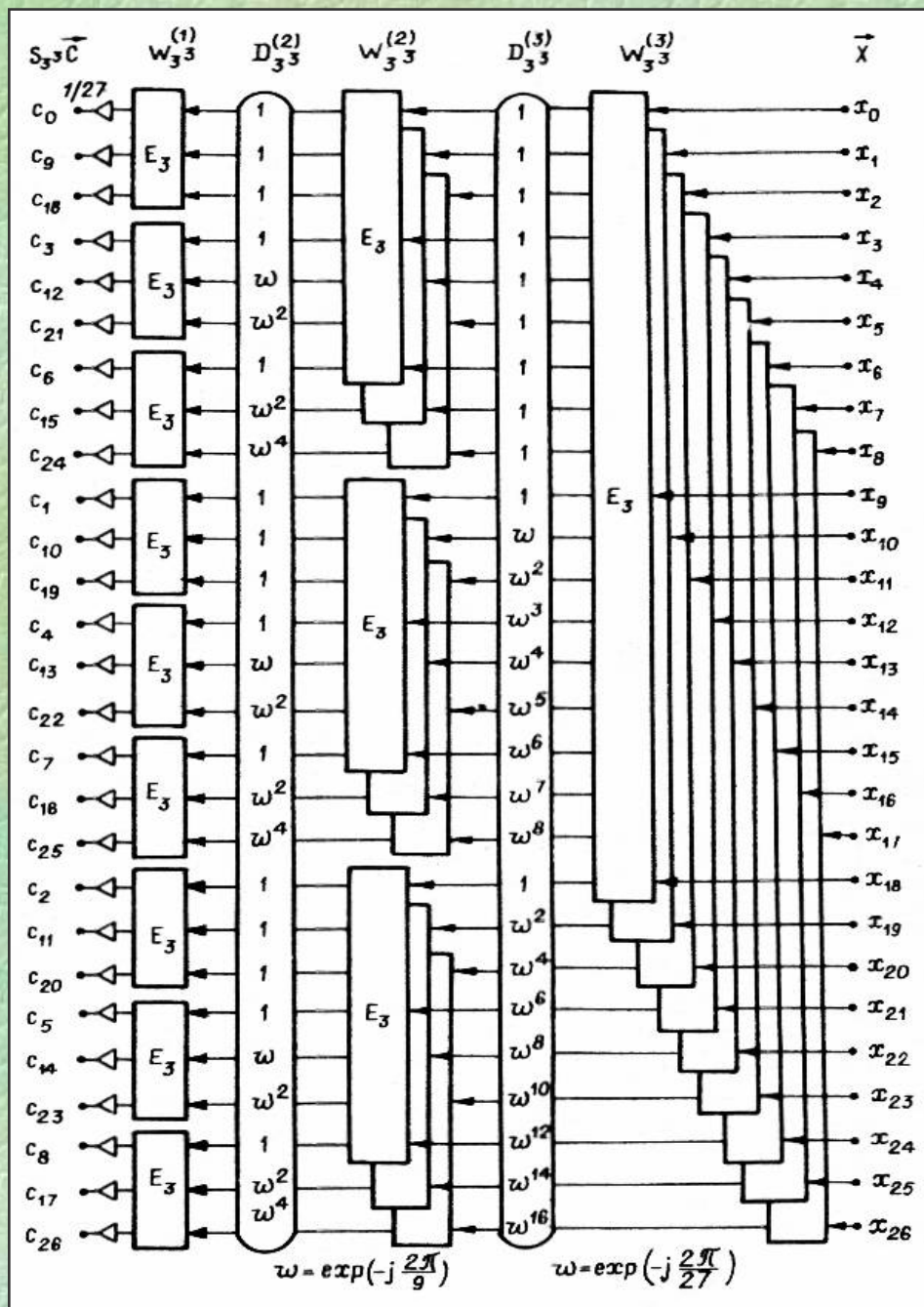


$$w_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$$

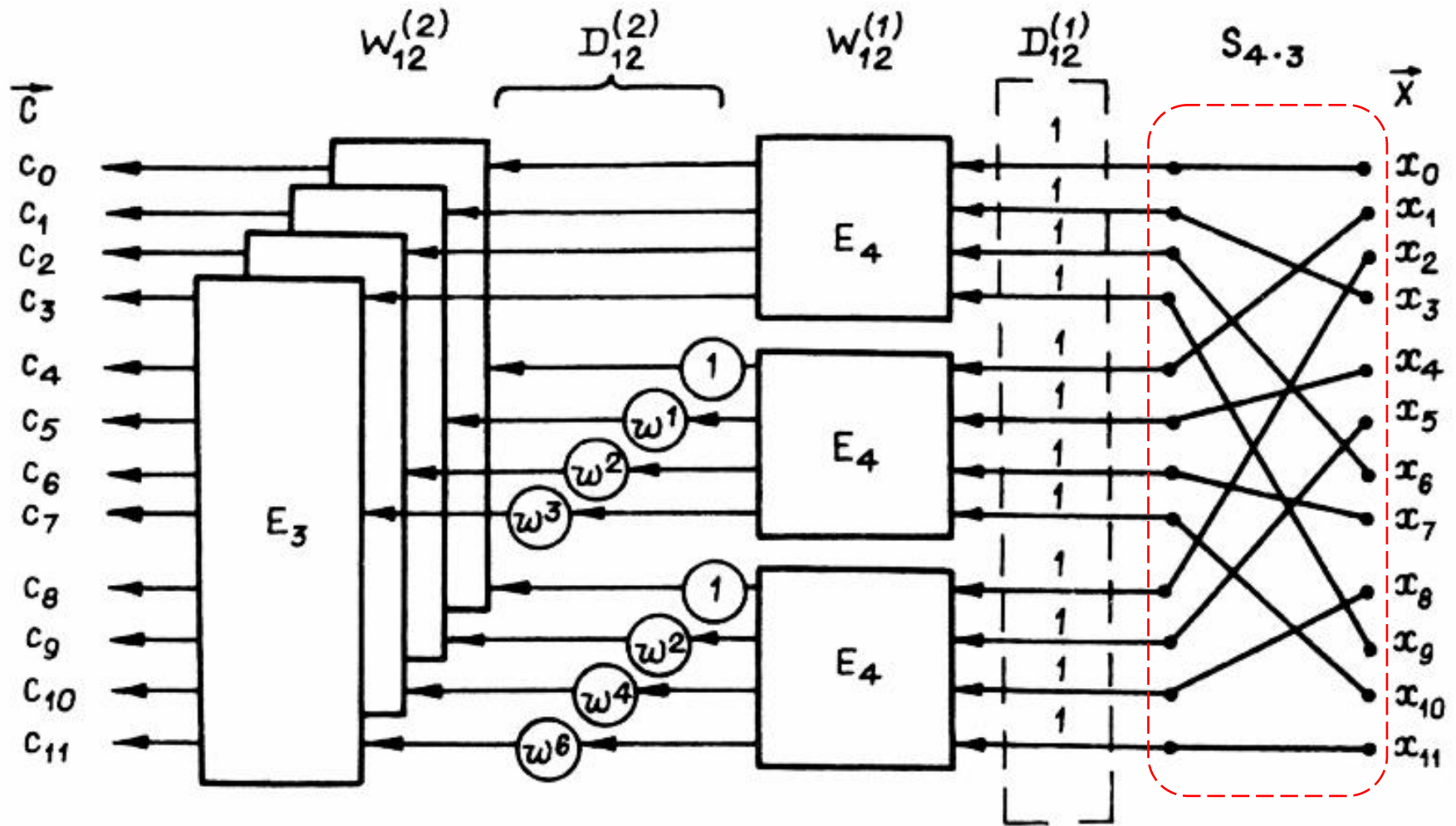
$$w_N^{kn} = w_N^{(kn) \bmod N}$$



Graf algorytmu szybkiego przekształcenia w bazie funkcji DEF dla  $N=3^3=27$

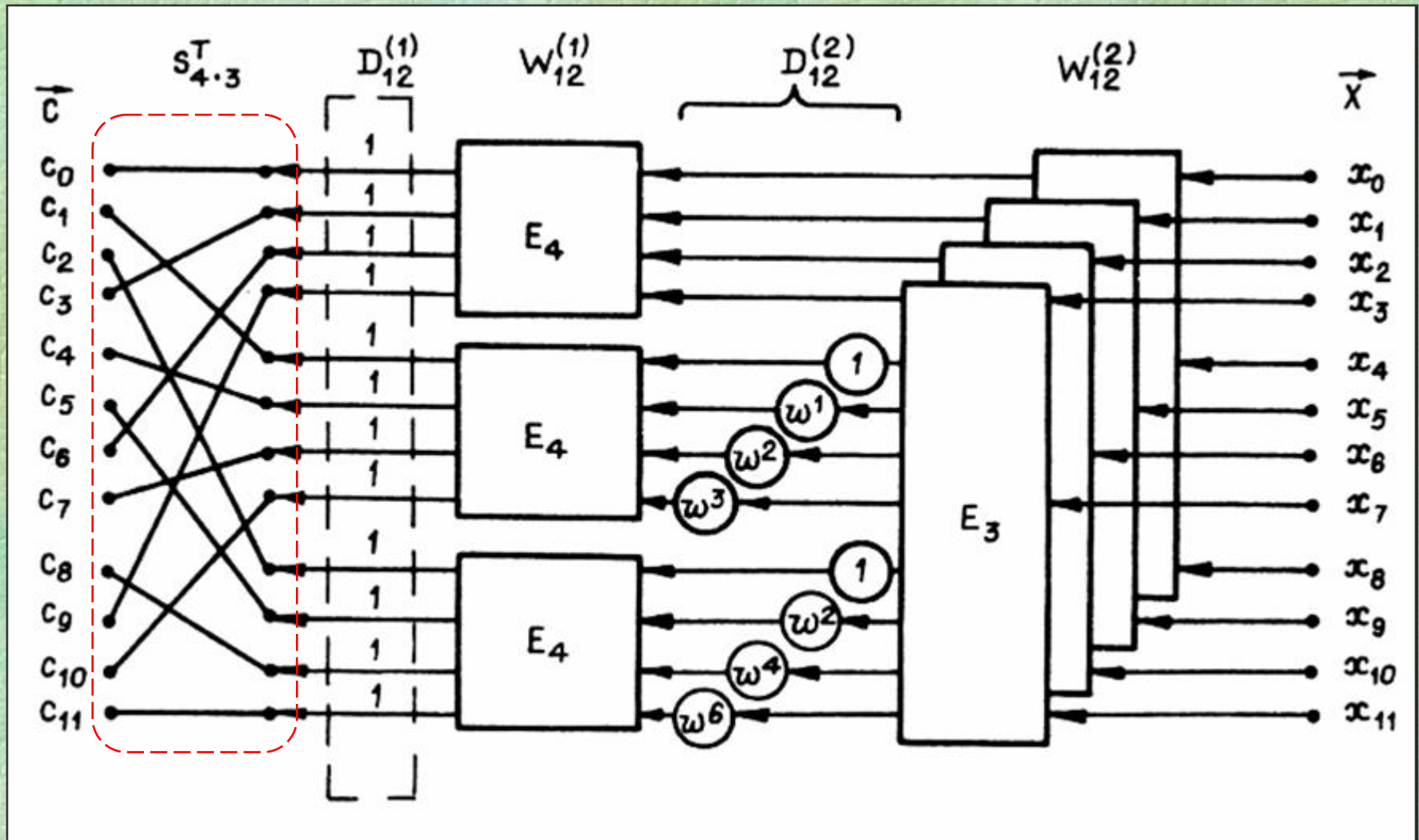


# Graf FFT dla $N=3 \times 4=12$

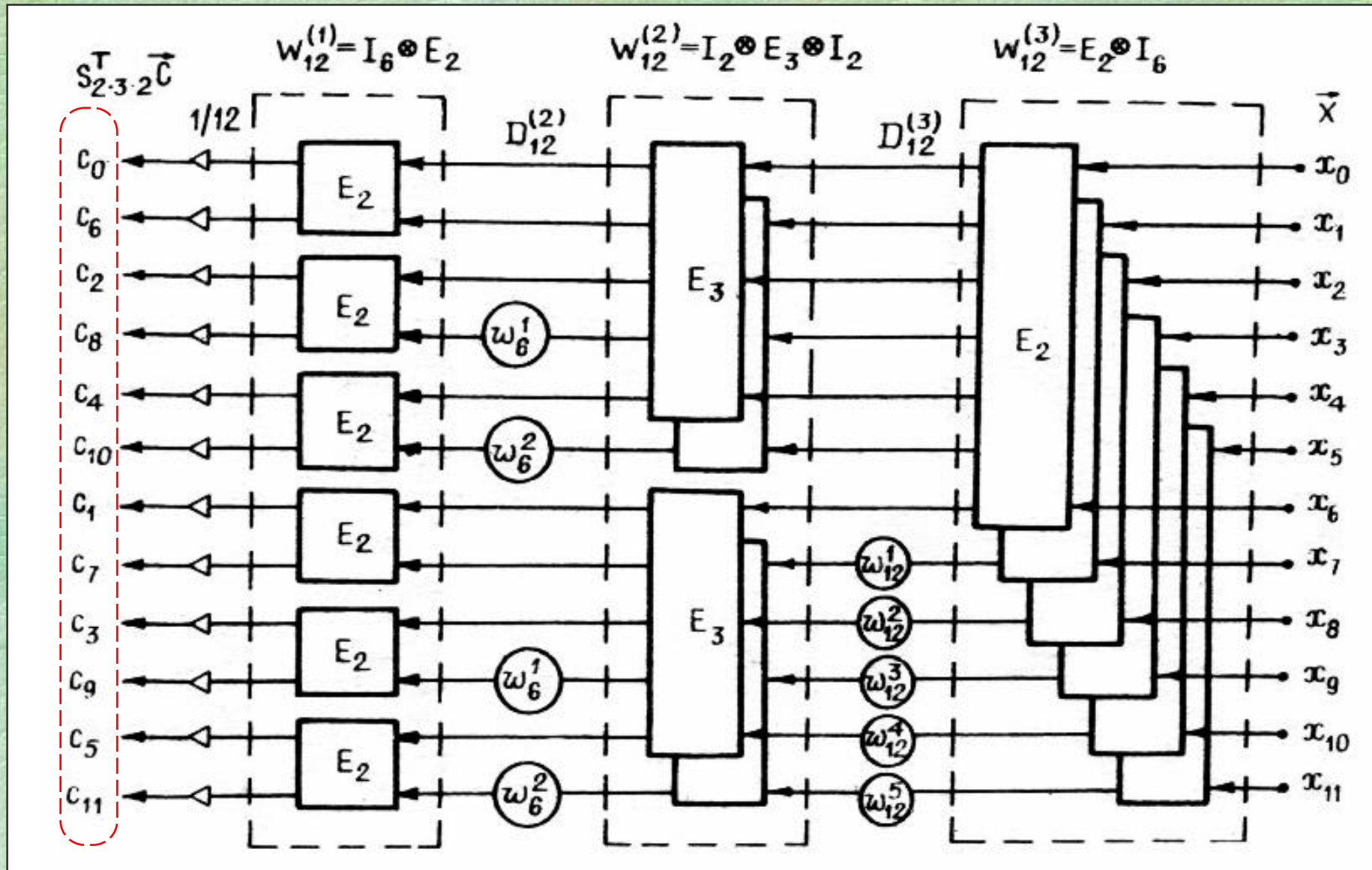




# Graf FFT dla $N=4 \times 3=12$



# Graf FFT dla $N=2 \times 3 \times 2=12$





# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie funkcji Wilenkina

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(1)} \dots \mathbf{W}^{(m-1)} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{W}^{(m-1)} \dots \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{I}_{r_{i+1} \dots r_{m+1}} \otimes \mathbf{E}_{r_i} \otimes \mathbf{I}_{r_0 \dots r_{i-1}} \\ \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}} \\ \mathbf{I}_{2^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{i-1}} \end{cases}$$

- baza funkcji WPF

- baza funkcji WKF

- baza funkcji

Wilenkina -Walsha

# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie funkcji Wilenkina

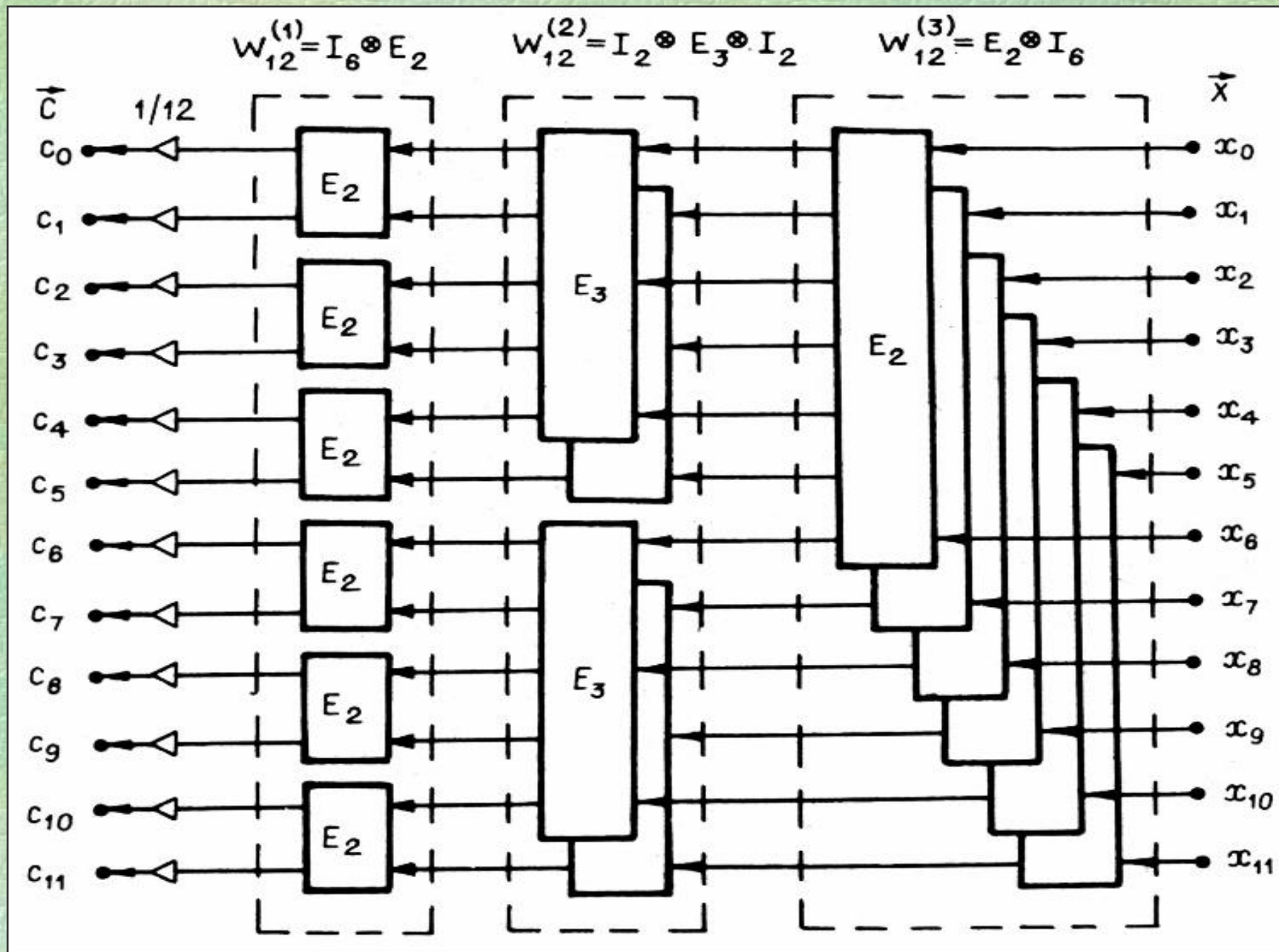
$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(1)} \dots \mathbf{W}^{(m-1)} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{X}$$

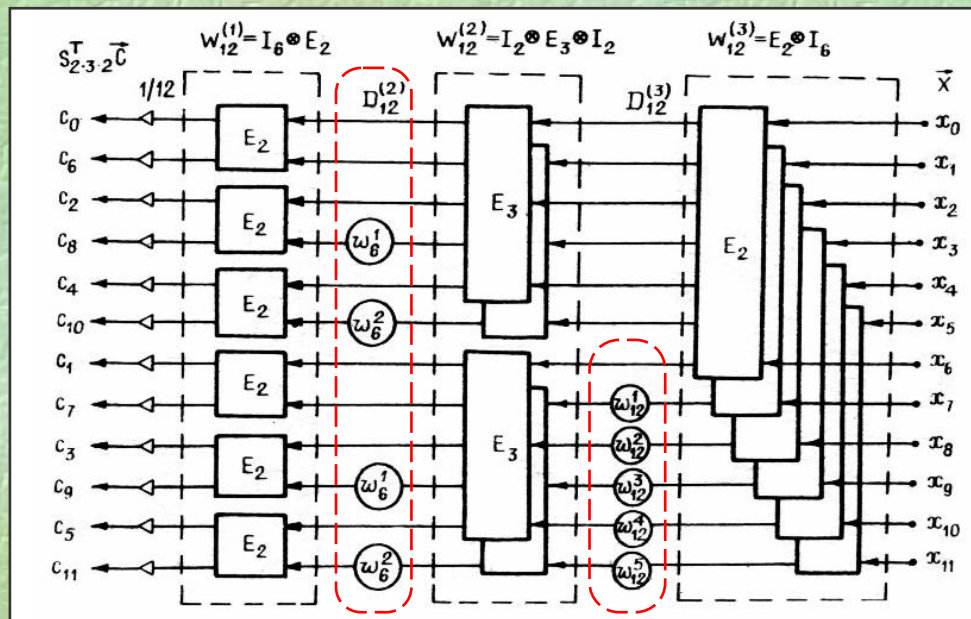
$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{W}^{(m-1)} \dots \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{I}_{r_{i+1} \dots r_{m+1}} \otimes \mathbf{E}_{r_i} \otimes \mathbf{I}_{r_0 \dots r_{i-1}} & \text{baza VPF} \\ \mathbf{I}_{r^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}} & \text{baza VKF} \\ \mathbf{I}_{2^{m-i}} \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{i-1}} & \text{baza Vilenkina - Walsh'a} \end{cases}$$

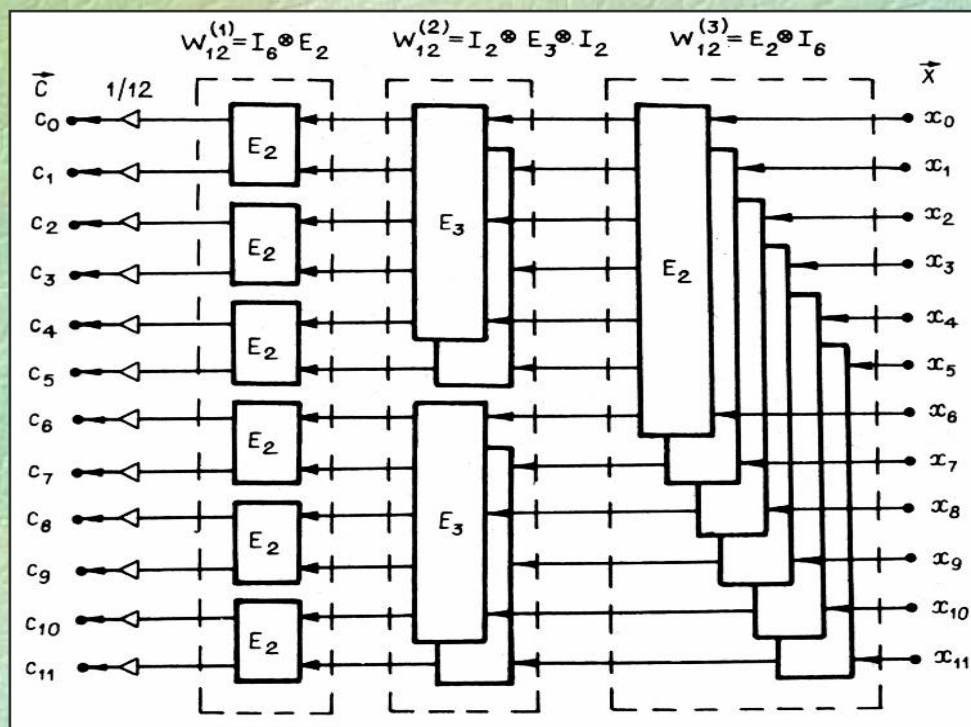


# Graf szybkiej transformaty w bazie WPF dla $N=12$



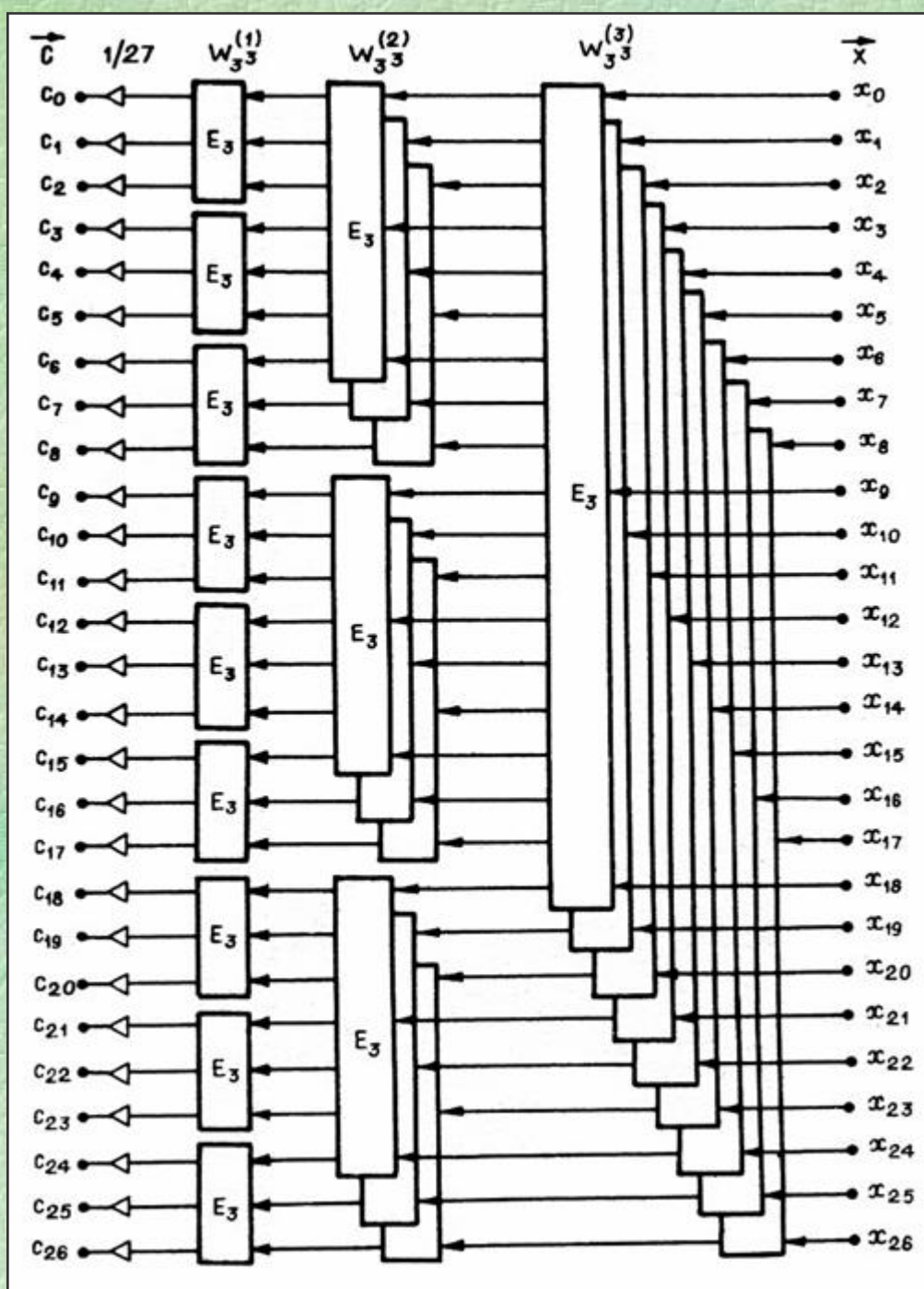


Graf FFT dla  $N=2 \times 3 \times 2=12$

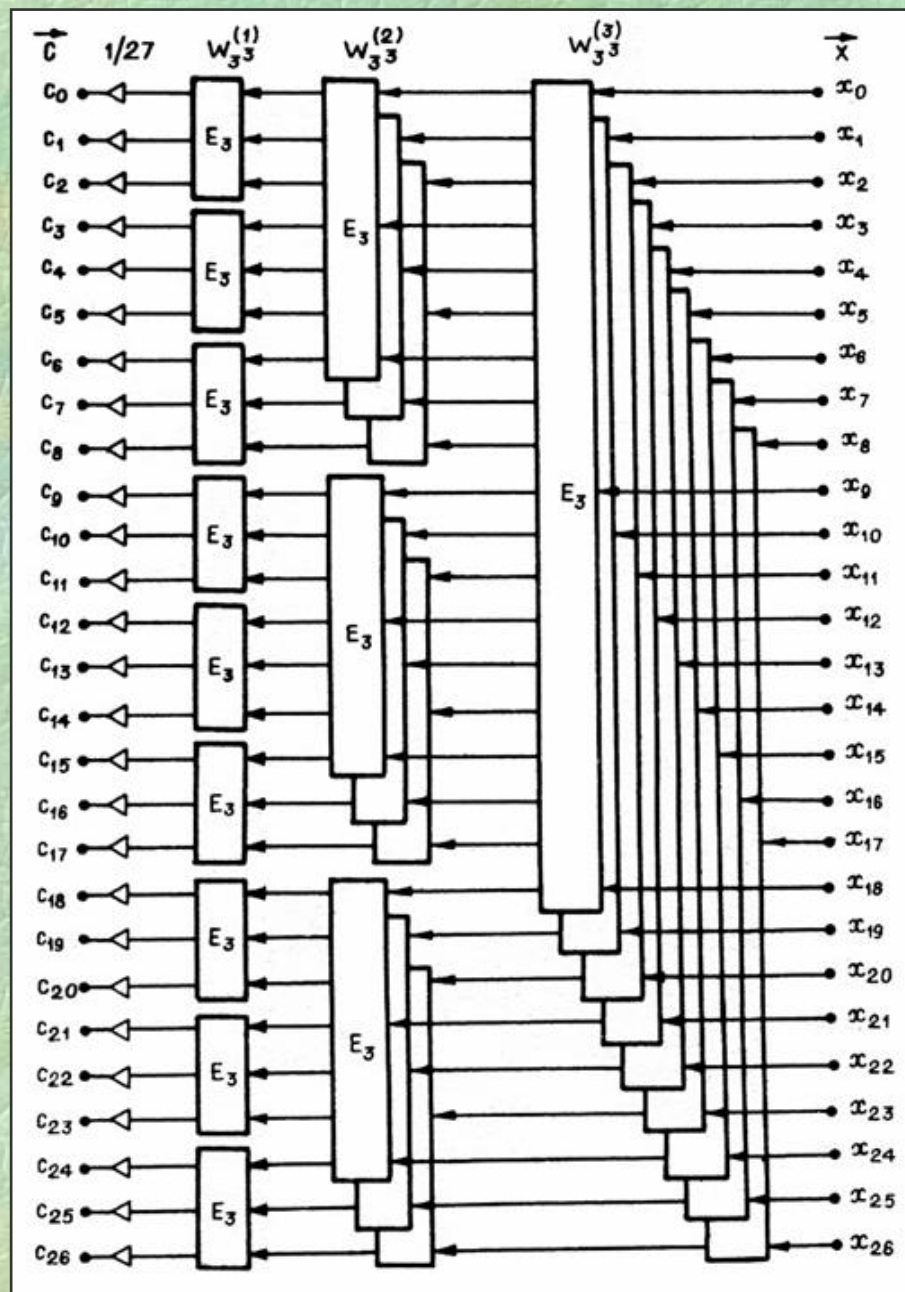
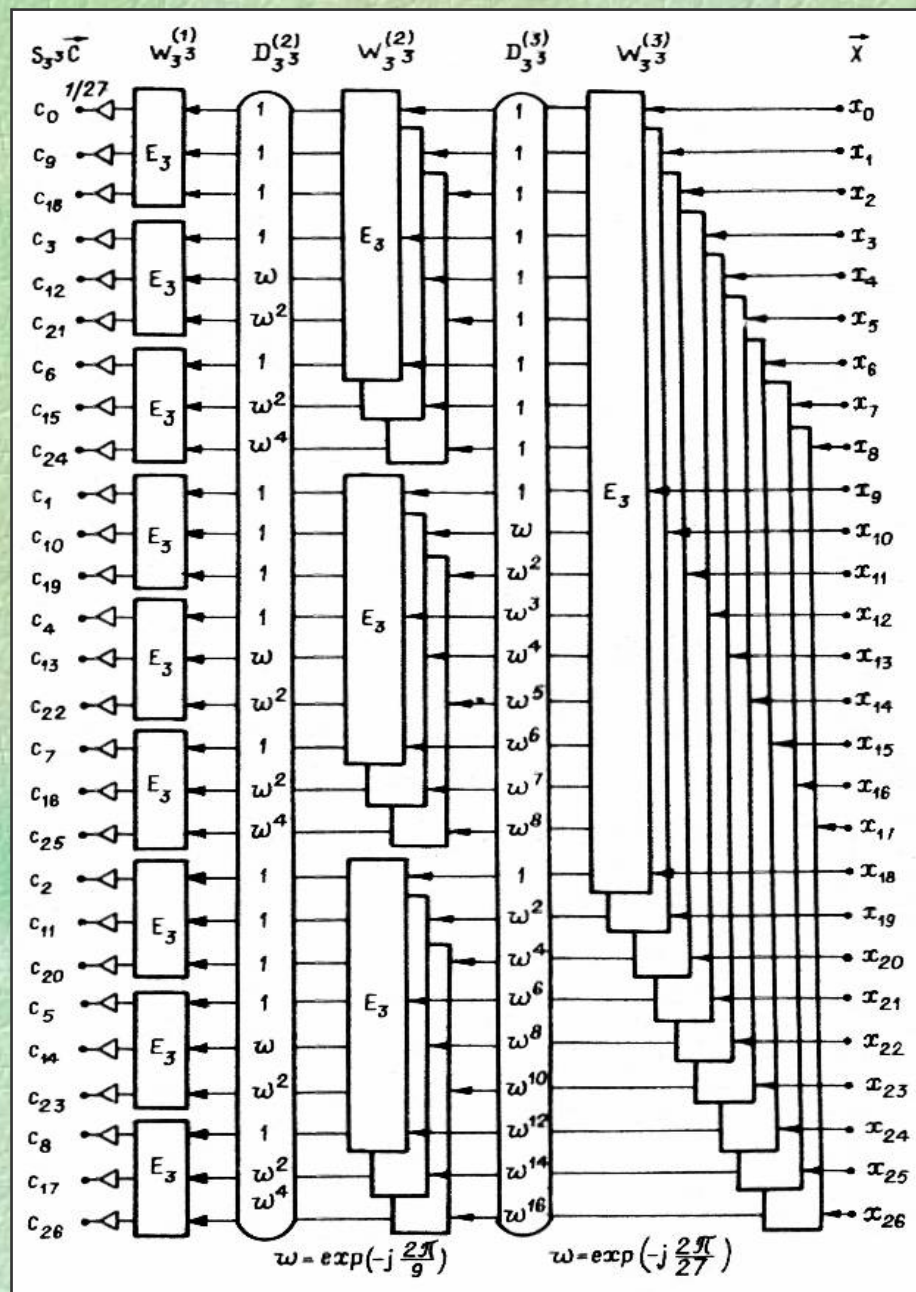


Graf szybkiej  
transformaty  
w baze WPF dla  $N=12$



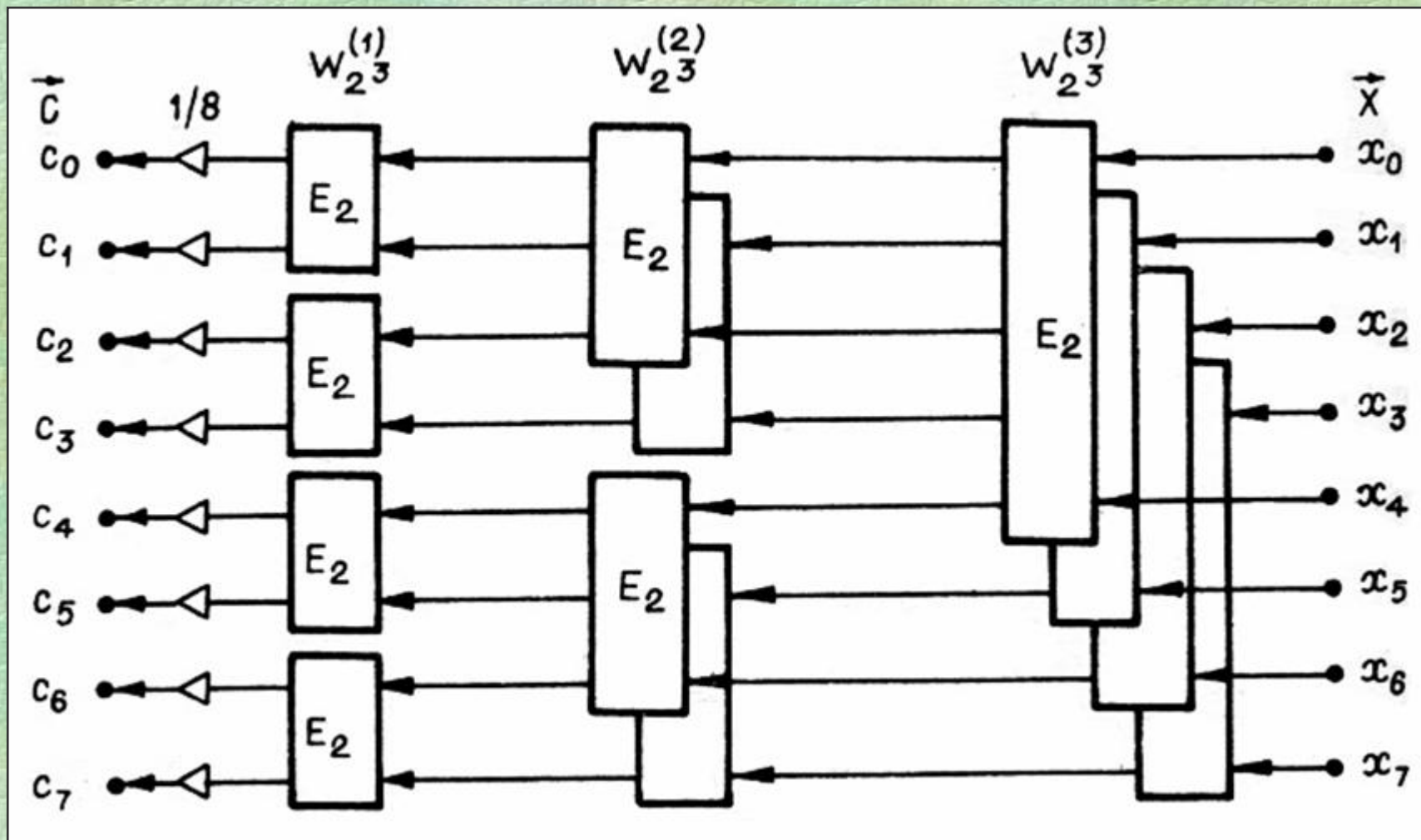


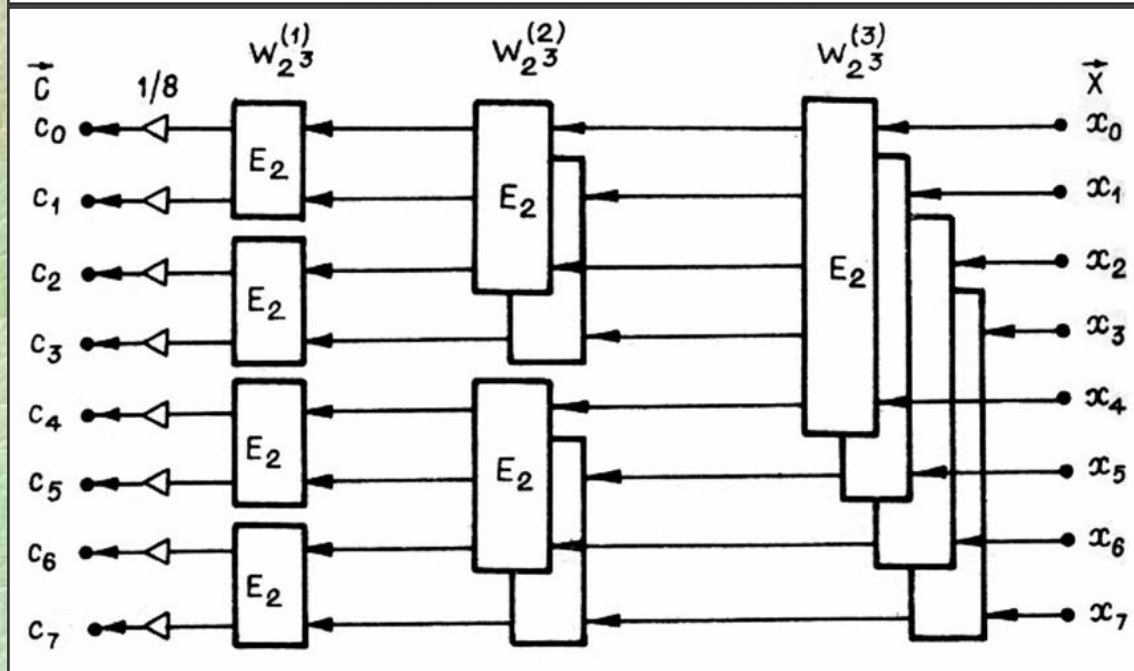
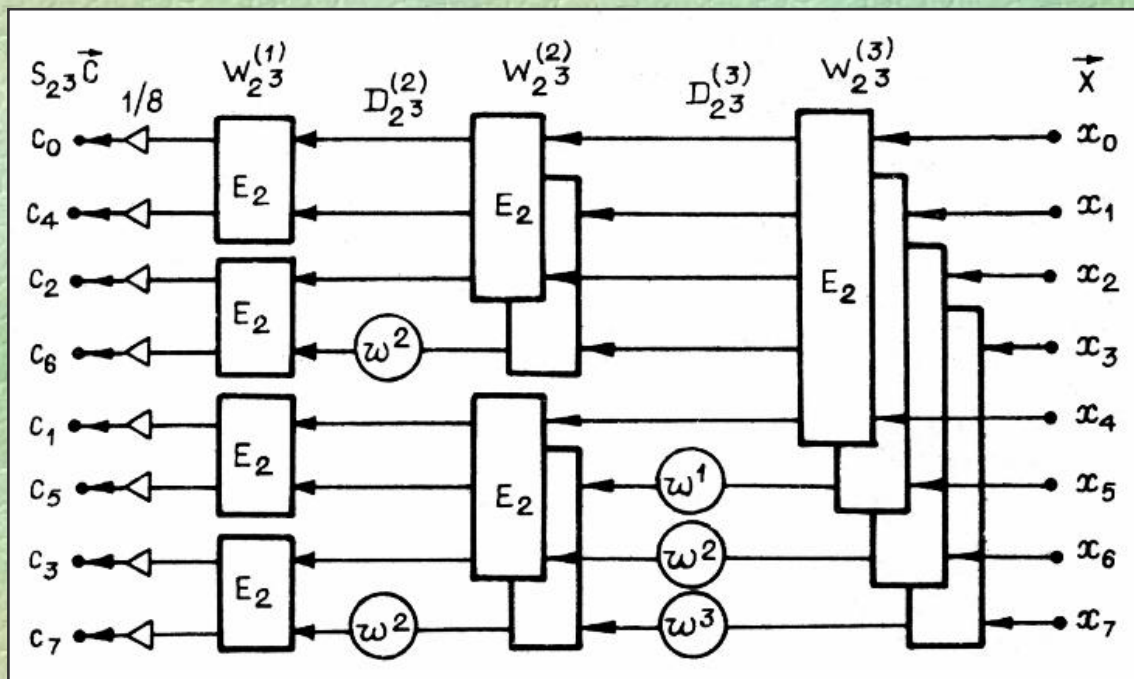
Graf algorytmu szybkiego  
przekształcenia  
w bazie funkcji **WKF-  
Kroneckera (Wilensina-  
Krestensona-Kroneckera)**  
dla  $N=3^3=27$





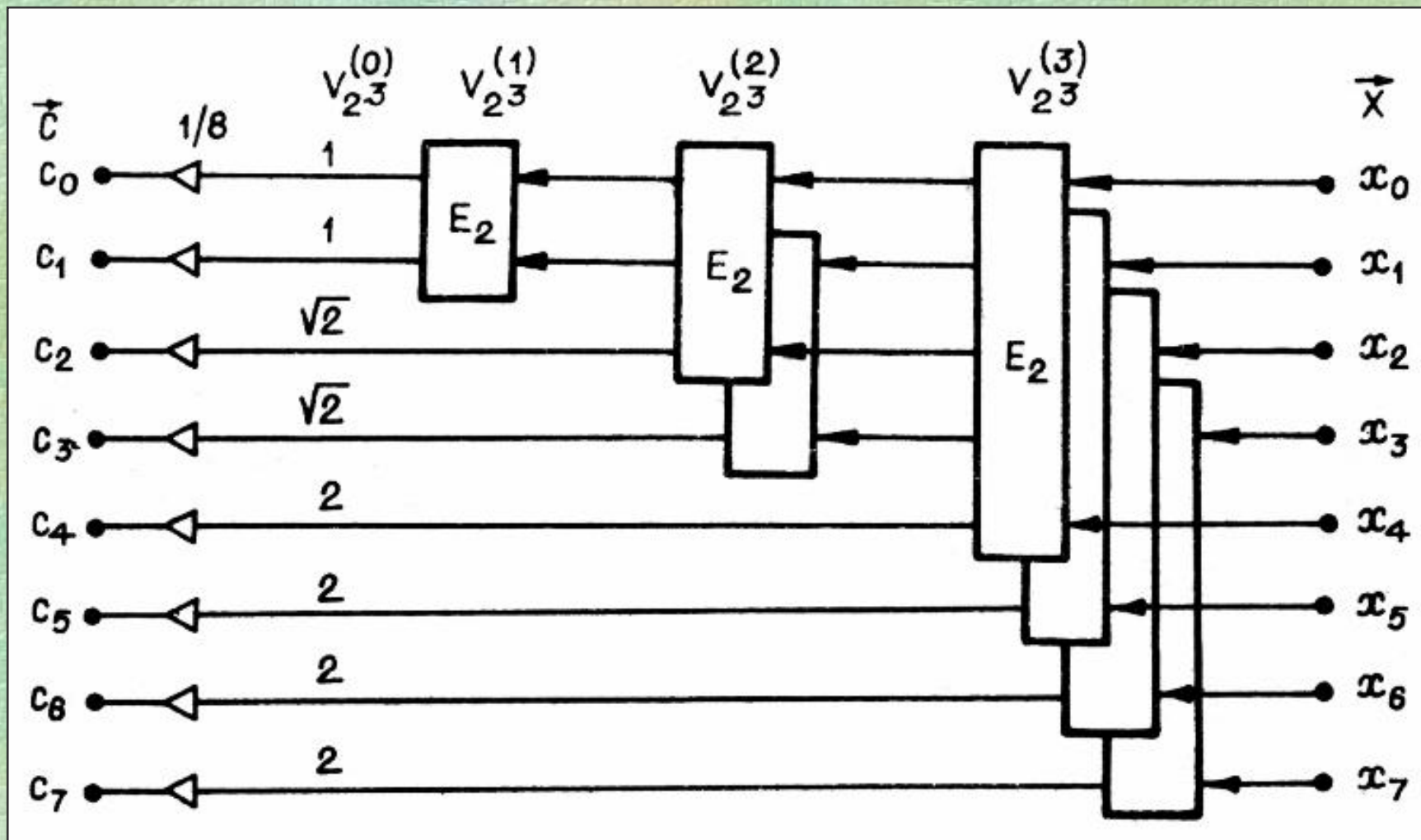
# Graf algorytmu szybkiego przekształcenia w bazie funkcji Walsh dla $N=8$

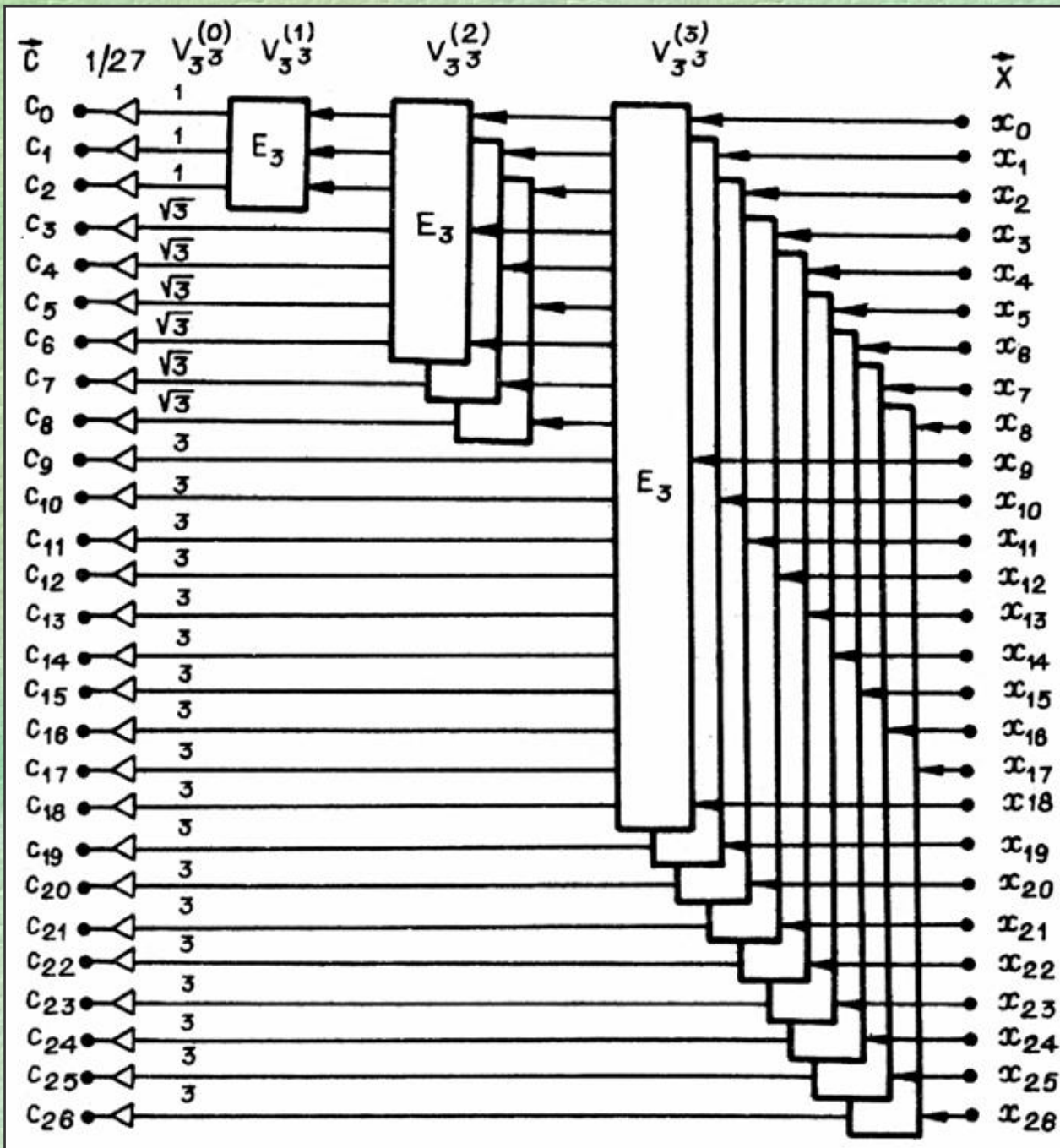






# Graf algorytmu szybkiego przekształcenia w bazie ściętych funkcji Walsh dla $N=8$





Graf szybkiego  
algorytmu w bazie  
„ściętych” funkcji  
**WKF-Kroneckera**  
dla  $N=27$



# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie funkcji Haara-WPF

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N} \mathbf{V}_N^{(0)} (\mathbf{V}_N^{(1)} \hat{\mathbf{S}}_N^{(1)} \dots \mathbf{V}_N^{(m-1)} \hat{\mathbf{S}}_N^{(m-1)}) \mathbf{V}_N^{(m)} \mathbf{S}_{r_1 \dots r_m} \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{V}_N^{(0)} = \text{diag}[\mathbf{I}_{r_1}, \sqrt{R_{1,1}} \mathbf{I}_{R_{1,1}(r_2-1)}, \dots, \sqrt{R_{1,m-1}} \mathbf{I}_{R_{1,m-1}(r_m-1)}]$$

$$\mathbf{V}_N^{(i)} = \text{diag}(\mathbf{E}_{r_i} \otimes \mathbf{I}_{R_{0,i-1}}, \mathbf{I}_{N-R_{1,i}}), i = \overline{1, m}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_N^{(i)} = \text{diag}(\mathbf{I}_{R_i}, \mathbf{I}_{r_{i+1}-1} \otimes \mathbf{S}_{r_1 \dots r_i}^T, \mathbf{I}_{N-R_{1,i+1}}), i = \overline{1, m-1}$$

# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie funkcji Haara-Krestensona

$$\mathbf{C} = \frac{1}{r^m} \mathbf{V}_{r^m}^{(0)} (\mathbf{V}_{r^m}^{(1)} \hat{\mathbf{S}}_{r^m}^{(1)} \dots \mathbf{V}_{r^m}^{(m-1)} \hat{\mathbf{S}}_{r^m}^{(m-1)}) \mathbf{V}_{r^m}^{(m)} \mathbf{S}_{r^m} \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{V}_{r^m}^{(0)} = \text{diag}[\mathbf{I}_r, (\sqrt{r})^1 \mathbf{I}_{(r-1)r^1}, \dots, (\sqrt{r})^{m-1} \mathbf{I}_{(r-1)r^{m-1}}]$$

$$\mathbf{V}_{r^m}^{(i)} = \text{diag}(\mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{r^{i-1}}, \mathbf{I}_{N-r^i}), i = \overline{1, m}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{r^m}^{(i)} = \text{diag}(\mathbf{I}_{r^i}, \mathbf{I}_{r-1} \otimes \mathbf{S}_{r^i}, \mathbf{I}_{N-r^{i+1}}), i = \overline{1, m-1}$$



# Procedury obliczeniowe szybkiej transformaty w bazie funkcji Haara-Walsha

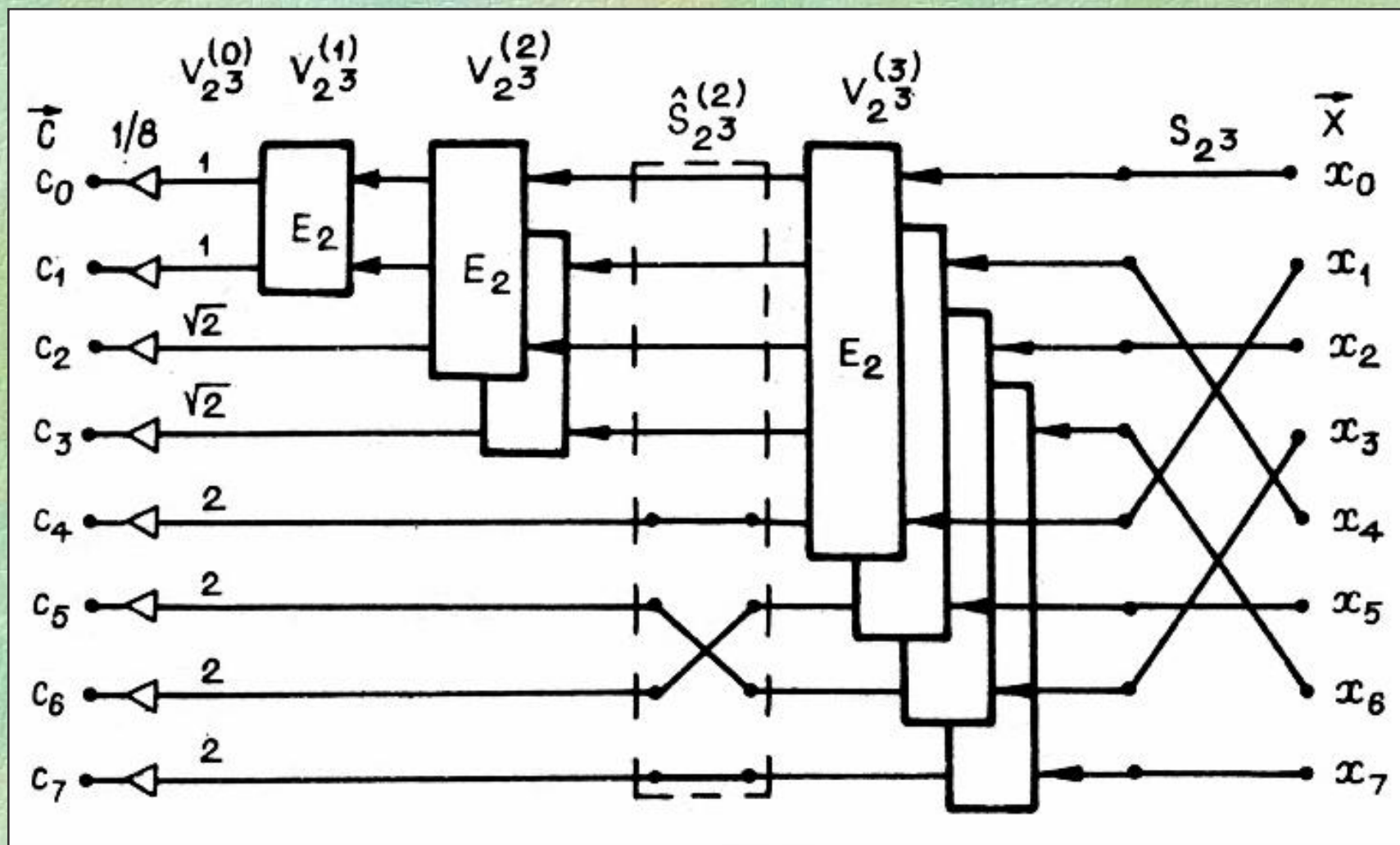
$$\mathbf{C} = \frac{1}{2^m} \mathbf{V}_{2^m}^{(0)} (\mathbf{V}_{2^m}^{(1)} \hat{\mathbf{S}}_{2^m}^{(1)} \cdots \mathbf{V}_{2^m}^{(m-1)} \hat{\mathbf{S}}_{2^m}^{(m-1)}) \mathbf{V}_{2^m}^{(m)} \mathbf{S}_{2^m} \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{V}_{2^m}^{(0)} = \text{diag}[\mathbf{I}_2, (\sqrt{2})^1 \mathbf{I}_{2^1}, (\sqrt{2})^2 \mathbf{I}_{2^2}, \dots, (\sqrt{2})^{m-1} \mathbf{I}_{2^{m-1}}]$$

$$\mathbf{V}_{2^m}^{(i)} = \text{diag}(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{i-1}}, \mathbf{I}_{N-2^i}), i = \overline{1, m}$$

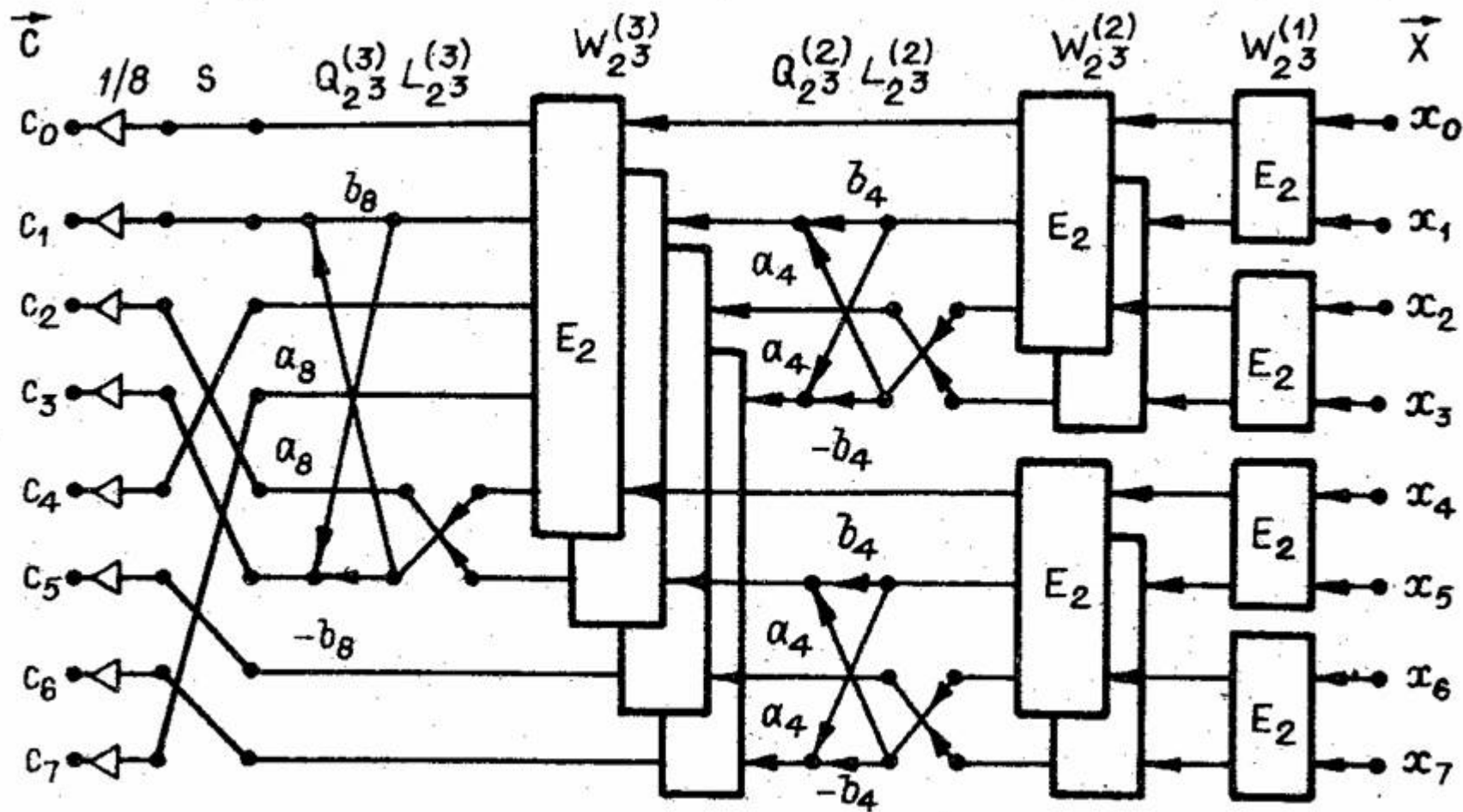
$$\hat{\mathbf{S}}_{2^m}^{(i)} = \text{diag}(\mathbf{I}_{2^i}, \mathbf{S}_{2^i}, \mathbf{I}_{N-2^{i+1}}), i = \overline{1, m-1}$$

# Graf algorytmu szybkiego przekształcenia w bazie funkcji Haara-Walsha dla $N=8$





# Graf algorytmu szybkiego przekształcenia w bazie funkcji Slant dla $N=8$



# **Dyskretne Przekształcenie Kosinusowe (DCT)**





**K. Ramamdan Rao**

Przekształcenie DCT po raz pierwszy zostało przedstawione w artykule „Discrete Cosine Transform” przez N. Ahmed’a, T. Natarjan’a oraz **K.R. Rao** w roku 1974.

Jest ono podstawowym przekształceniem transformującym używanym przy stratnej kompresji obrazów oraz sekwencji wideo.

Użycie DCT zapewnia współczynnik kompresji na poziomie 20, co powoduje, że 8-bitowy obraz o 1024x 1024 pikselach może być zapisany w pliku o rozmiarach ok. 50 kbajtów.

Jednowymiarowe, dyskretne przekształcenie kosinusowe (1-D DCT) może być opisane w następującej postaci macierzowo-wektorowej:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_N \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{Y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{C}_N = \|c_{ij}\|$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} \cos \frac{(2j+1)i\pi}{2N} & i = 0, j = \overline{0, N-1} \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2j+1)i\pi}{2N} & i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, N-1} \end{cases}$$



Łatwo zauważyć, że do obliczenia przekształcenia dla wektora wejściowego o długości  $N$  potrzeba  $N^2$  operacji mnożenia oraz operacji  $N(N-1)$  dodawania.

Złożoność obliczeniowa realizacji tego przekształcenia spowodowała, że powstało wiele szybkich algorytmów, które znacznie ją zmniejszają.

# Macierz 8-DCT

$$\mathbf{C}_8 = \begin{bmatrix} d & d & d & d & d & d & d & d \\ a & c & e & g & -g & -e & -c & -a \\ b & f & -f & -b & -b & -f & f & b \\ c & -g & -a & -e & e & a & g & -c \\ d & -d & -d & d & d & -d & -d & d \\ e & -a & g & c & -c & -g & a & -e \\ f & -b & b & -f & -f & b & -b & f \\ g & -e & c & -a & a & -a & e & -g \end{bmatrix}$$



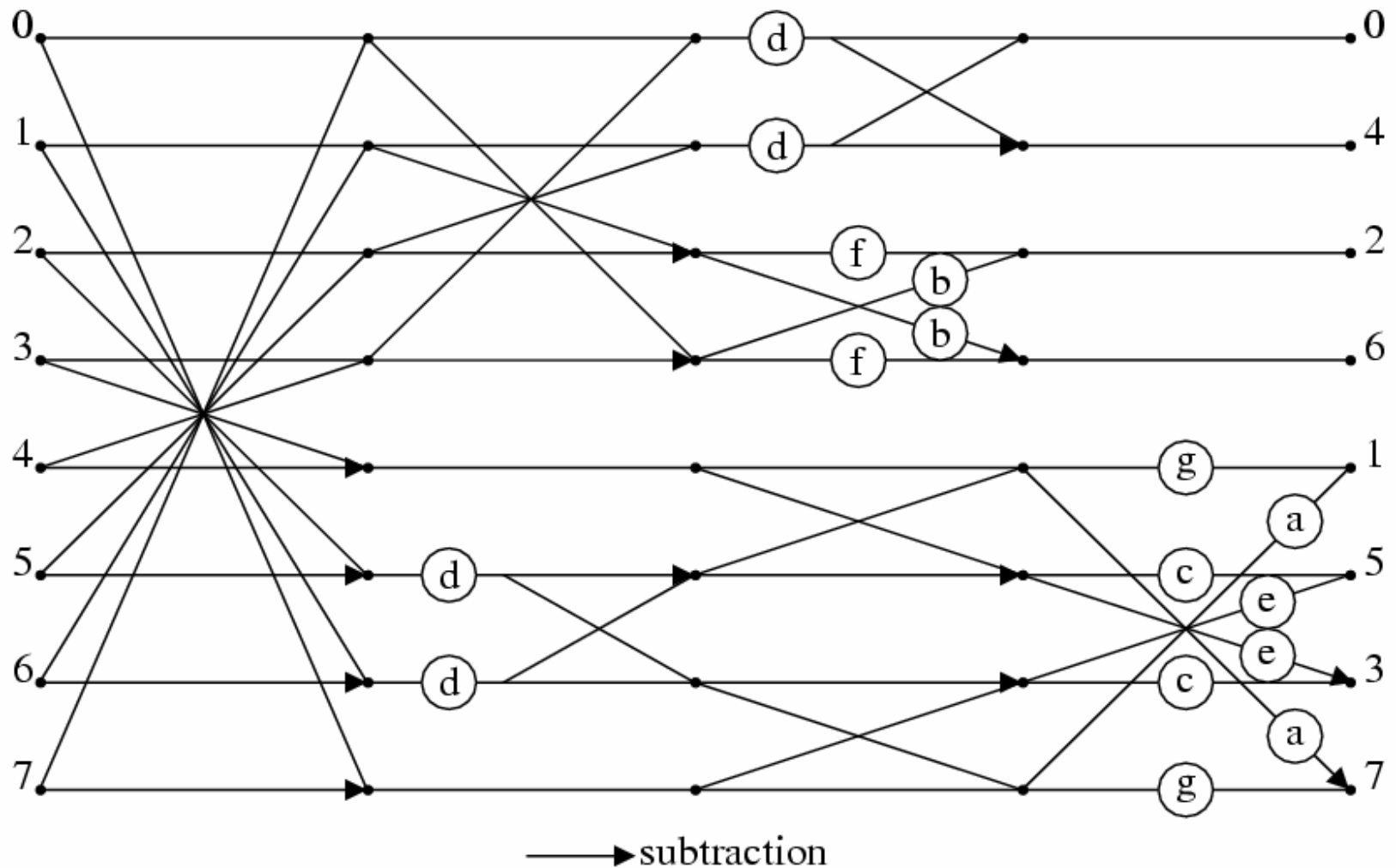
# Further Simplification

- The symmetry in the matrix can be used to simplify further.

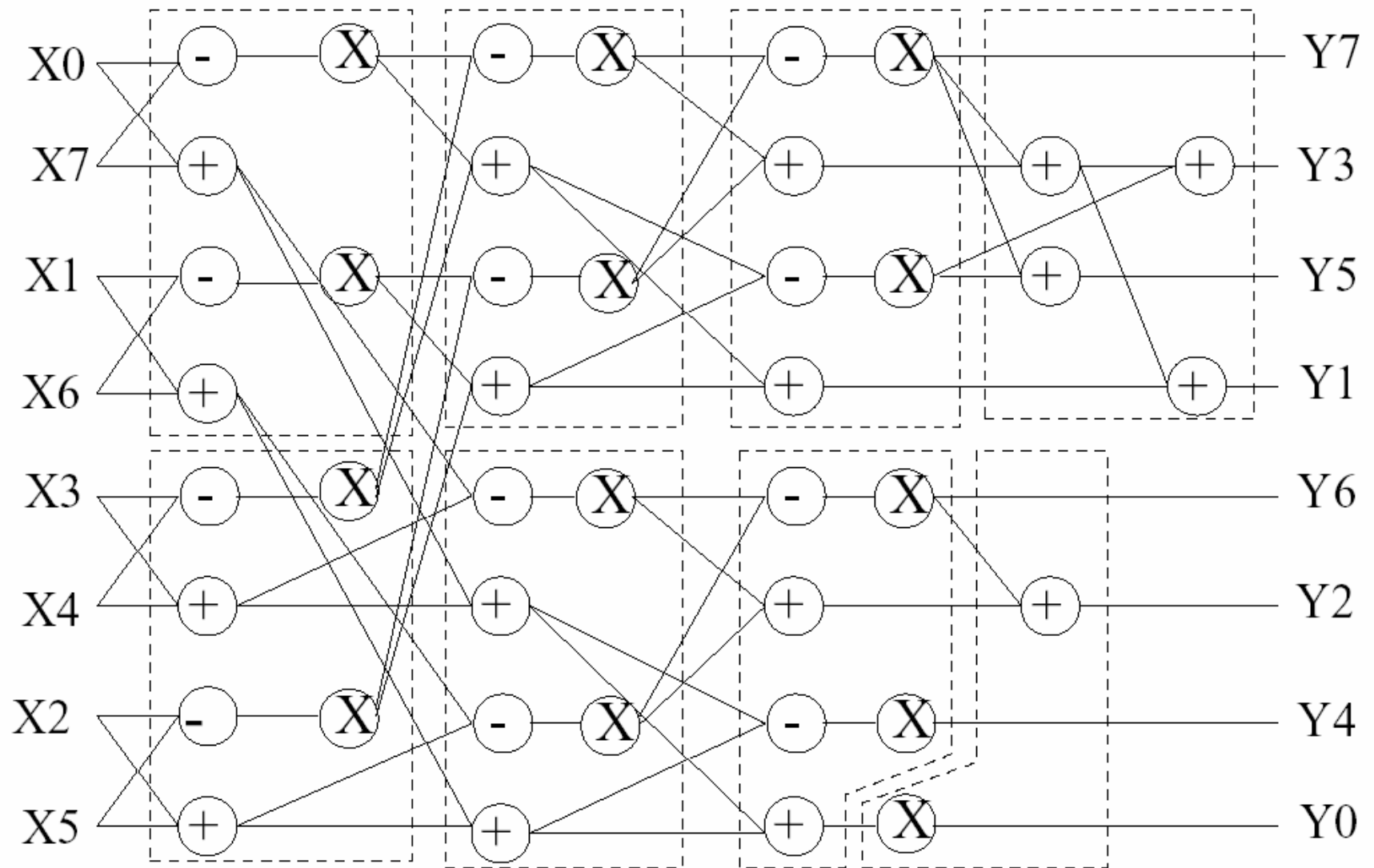
$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & d & d & d \\ b & f & -f & -b \\ d & -d & -d & d \\ f & -b & b & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_7 \\ x_1 + x_6 \\ x_2 + x_5 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

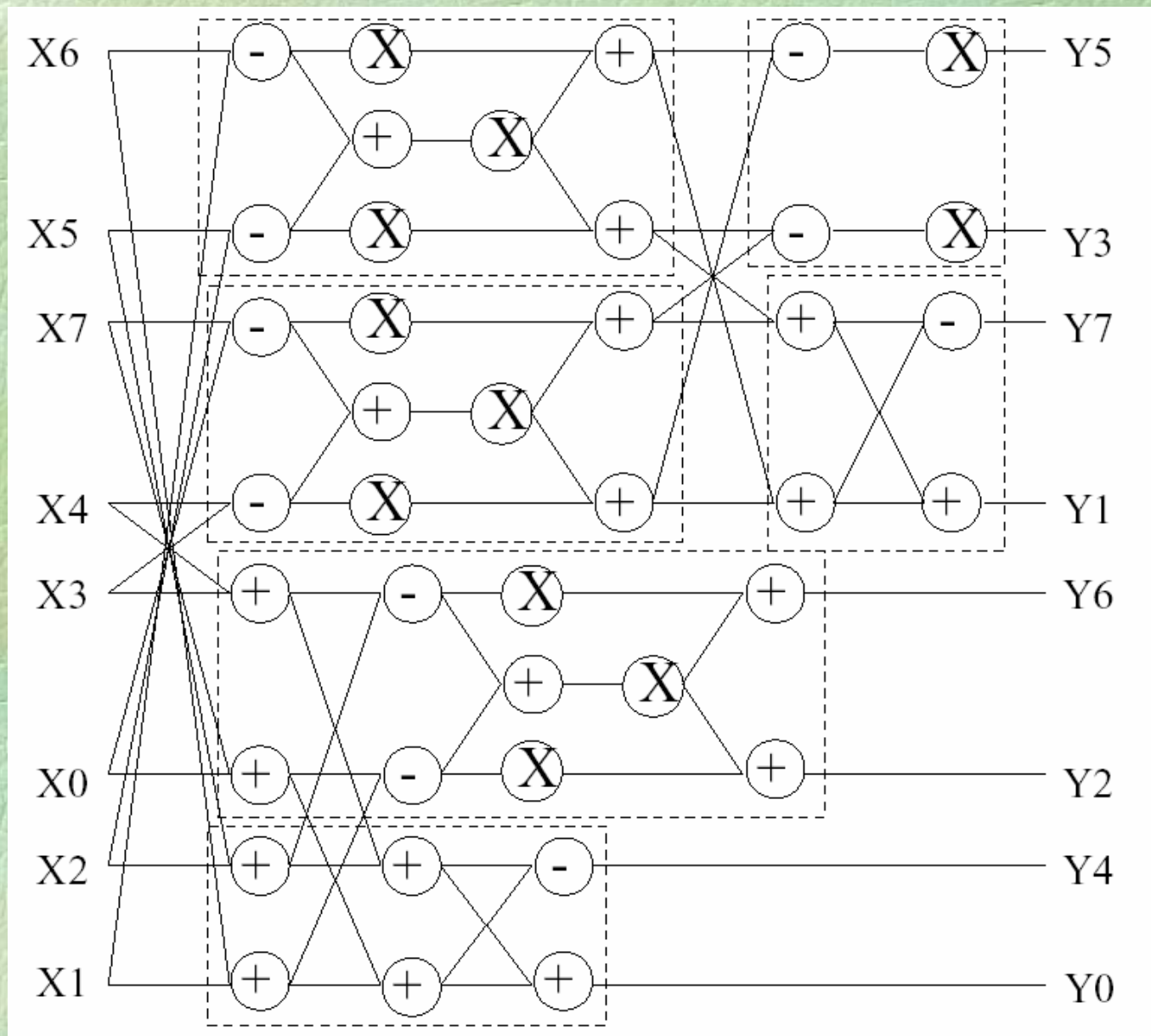
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e & g \\ c & -g & -a & -e \\ e & -a & g & c \\ g & -e & c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 - x_7 \\ x_1 - x_6 \\ x_2 - x_5 \\ x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

# Fast Algorithms





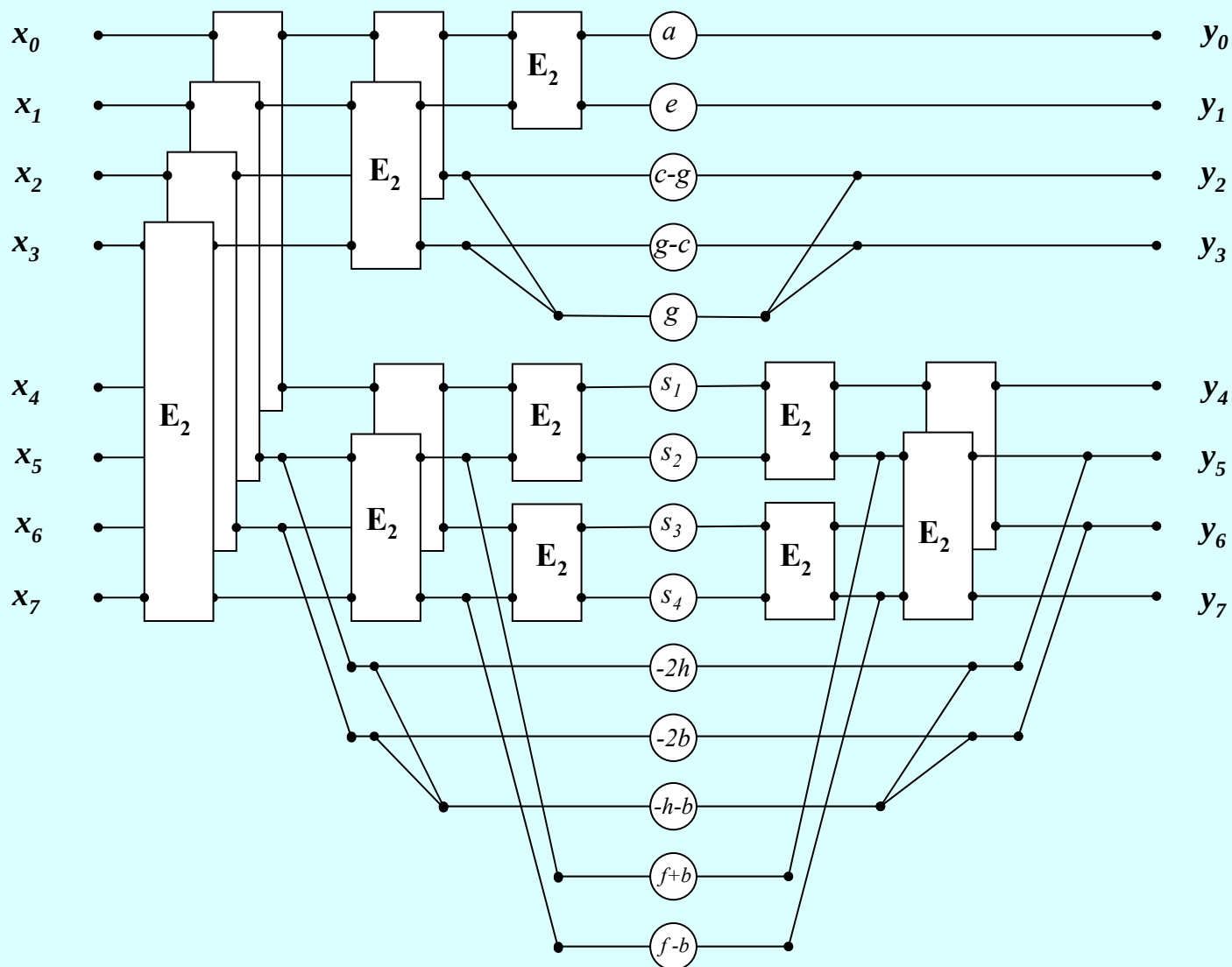




Algorithm by Loeffler



14 operacji mnożenia, 40 operacji dodawania



W tabeli pokazane zostało zestawienie różnych algorytmów oraz liczba operacji potrzebnych do wyznaczenia przekształcenia DCT dla długości wektora wejściowego  $N=8$ .

| Metoda DCT                    | Liczba mnożeń | Liczba dodawań |
|-------------------------------|---------------|----------------|
| 1-D Original DCT              | 64            | 56             |
| 1-D Odd/Even Decomposition[4] | 22            | 29             |
| 1-D Chen [3]                  | 16            | 26             |
| 1-D Lee [3]                   | 12            | 29             |
| 1-D Loeffler, Ligtenberg [3]  | 11            | 29             |



# Algorithm by Arai, Agui i Nakajama

$$\underline{y} = \underline{S} \underline{P} \underline{M}_1 \underline{M}_2 \underline{M}_3 \underline{M}_4 \underline{M}_5 \underline{M}_6 \underline{x}$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ & 0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & c_4 & \\ & & 1 & -c_2 & -c_6 \\ & & & 1 & c_4 & c_2 \\ 0 & & & & -c_6 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & 0 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

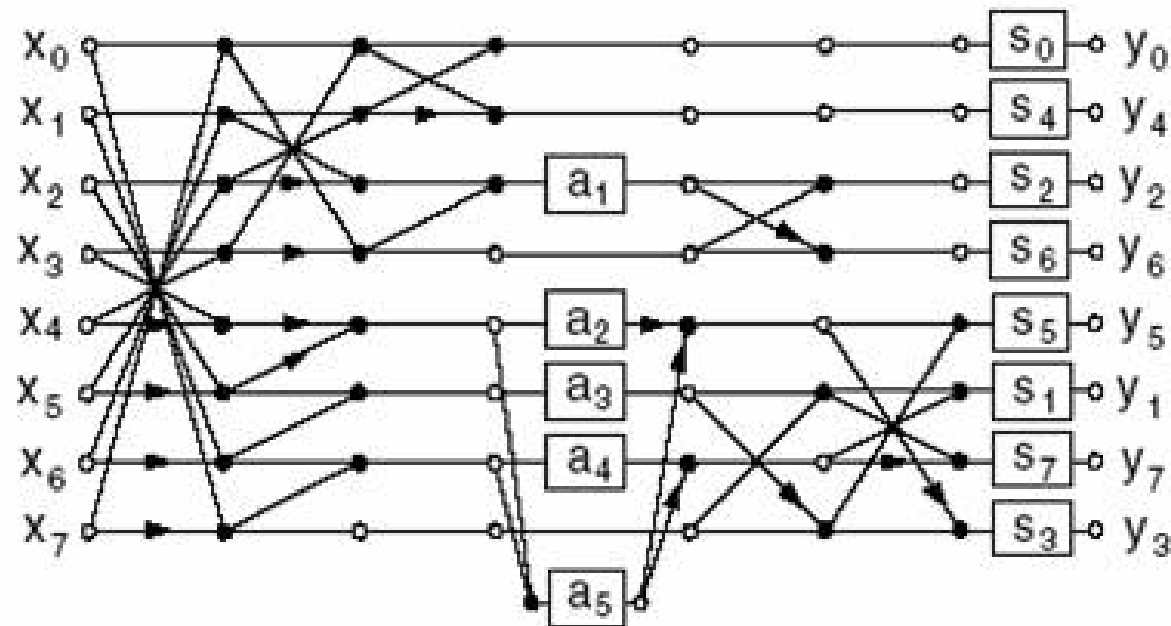
$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 & 1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_5 = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & -1 & & & \\ 1 & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & -1 \\ 0 & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 & 1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_6 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & \\ 0 & & & 1 & -1 & 0 \\ & & 1 & & -1 & \\ 1 & & & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Signal flow graph for fast (scaled) 8-DCT according to Arai, Agui, Nakajima:



only 5 + 8 <sup>scaling</sup> multiplications  
(direct matrix multiplication: 64 multiplications)

Multiplication:

$$u \circ \boxed{m} \circ m \cdot u$$

Addition:

$$u \circ v \circ u + v$$

$$v \circ u - v$$

$$u \circ v \circ u - v$$

$$v \circ u - v$$

$$a_1 = C_4$$

$$a_2 = C_2 - C_6$$

$$a_3 = C_4$$

$$a_4 = C_6 + C_2$$

$$a_5 = C_6$$

$$s_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$s_k = \frac{1}{4 C_k} ; k = 1 \dots 7$$

$$C_k = \cos(k\pi/16)$$



# Wektoryzacja Przekształcenia Kosinusowego

Jedną z metod przyspieszenia obróbki danych jest wektoryzacja obliczeń.

Maksymalnie zwektoryzowany algorytm przekształcenia DCT wymaga użycia dużej liczby układów mnożących i sumujących.

Z kolei mocno zredukowana liczba operacji arytmetycznych powoduje trudności przy implementacji poprzez dużą liczbę operacji wymiany danych.

Powoduje to konieczność synchronizacji i wprowadzenie dodatkowych opóźnień.

Taka implementacja zamiast zmniejszyć czas obliczeń, zwiększa go.

Dlatego celowa jest synteza takiego algorytmu, w którym zredukowana liczba operacji arytmetycznych nie wprowadzi zbędnych operacji przesyłu danych i jednocześnie będą one zredukowane do rozsądnego kompromisu.



# Wektoryzacja Algorytmu DCT

$$\mathbf{Y}_{8 \times 1} = \mathbf{P}_{8 \times 8} \cdot \mathbf{A}^{(2)}_{8 \times 22} \cdot \mathbf{D}_{22 \times 22} \cdot \mathbf{P}_{22 \times 8} \cdot \mathbf{A}^{(1)}_{8 \times 8} \cdot \mathbf{X}_{8 \times 1}$$

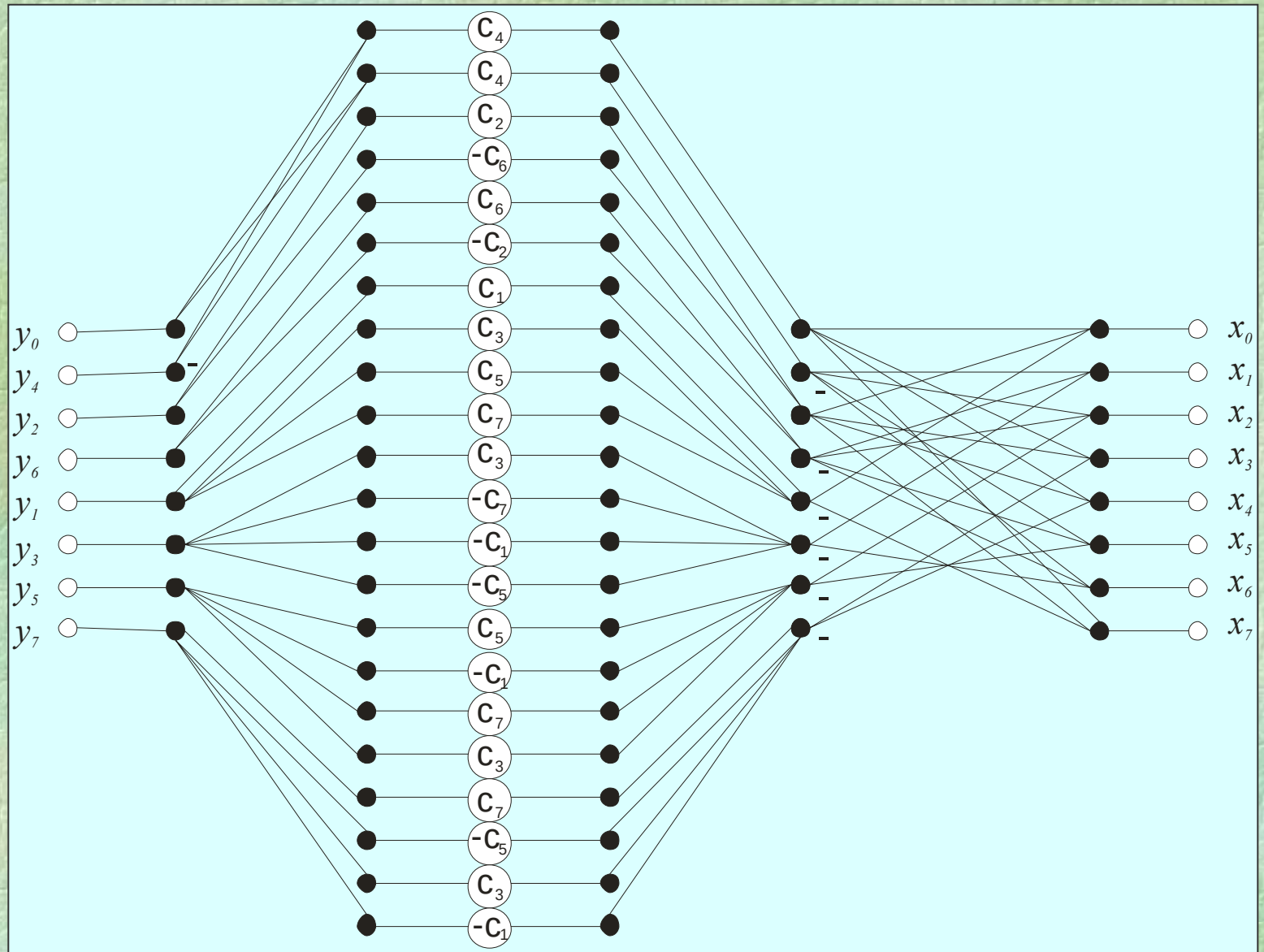
$$\mathbf{A}^{(1)}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & \\ 1 & & & -1 & & 1 & & \\ & 1 & -1 & & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & & & & -1 \\ & 1 & 1 & & & & & -1 \\ 1 & & & -1 & & -1 & & \\ & 1 & -1 & & -1 & & & \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{22 \times 8} = \mathbf{1}_{1 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{2 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{2 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{4 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{4 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{4 \times 1} \oplus \mathbf{1}_{4 \times 1},$$

$$\mathbf{D}_{22 \times 22} = \text{diag}(c_4, c_4, c_2, -c_6, c_6, -c_2, c_1, c_3, c_5, c_7, c_3, -c_7, -c_1, -c_5, c_5, -c_1, c_7, c_3, c_7, -c_5, c_3, -c_1),$$

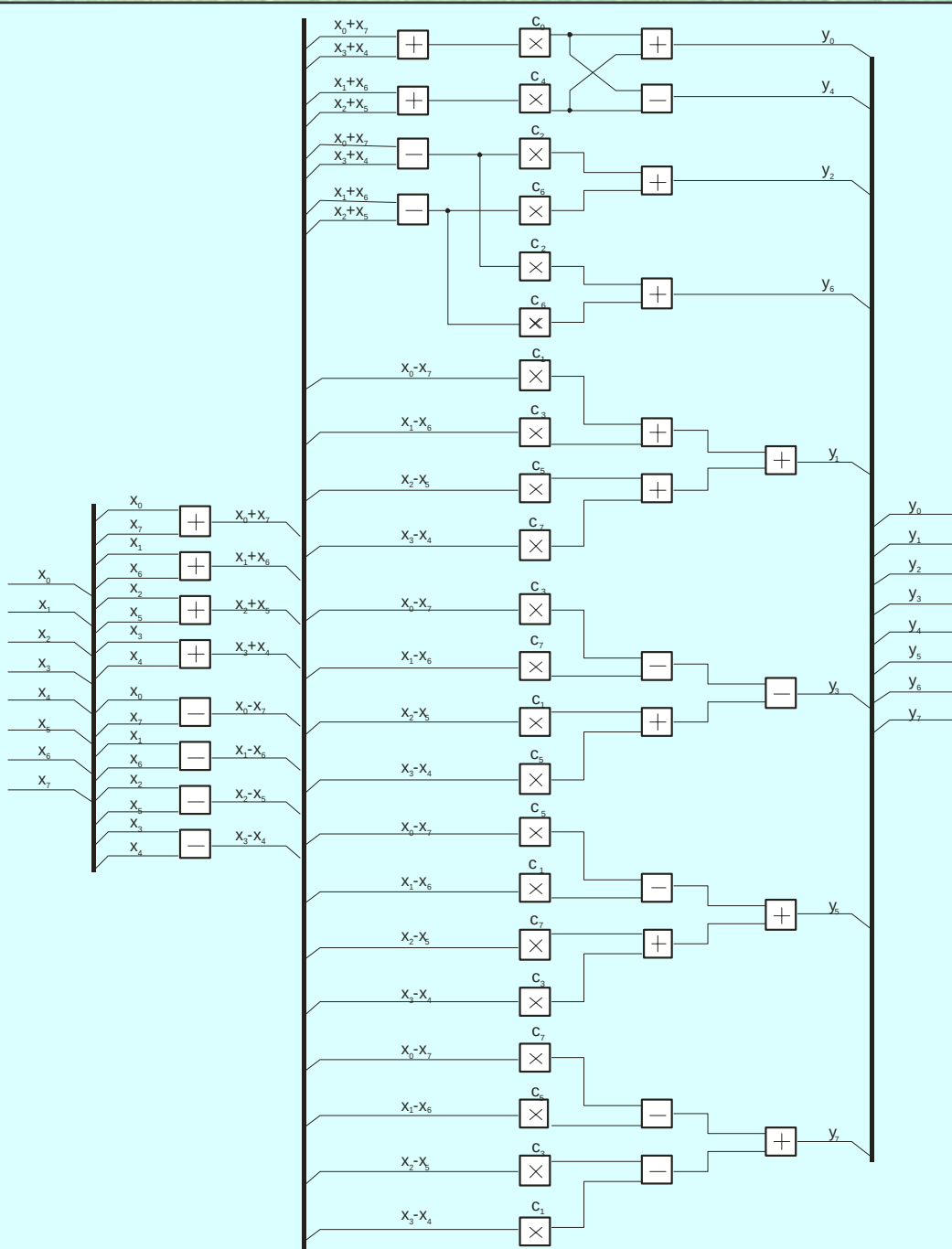
$$\mathbf{A}^{(2)}_{8 \times 22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 2} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 2} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 4} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 4} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 4} \oplus \mathbf{1}_{1 \times 4},$$

# Zwektoryzowany Algorytm DCT





# Architektura procesora DCT



# Implementacja

Implementacje przeprowadzono w środowisku projektowym firmy Altera MAX+plus II z użyciem struktury EPF6010ATC100-1 (rodzina FLEX6000).

W wyniku wykorzystanych zostało 758 bloków logicznych z 880 dostępnych, czyli otrzymano 86% wykorzystanie zasobów układu.

| Algorytm       | Liczba komórek logicznych | Ścieżka krytyczna [ns] | Prędkość pracy [MHz] |
|----------------|---------------------------|------------------------|----------------------|
| <b>DCT- 64</b> | 2142                      | -                      | -                    |
| <b>DCT- 22</b> | 758                       | 17.7                   | 56.49                |
| <b>DCT- 14</b> | 628                       | 23.1                   | 43.29                |
| <b>DCT- 5</b>  | 593                       | 38.2                   | 26.17                |



# Dziękuję za uwagę

