

Systemy przetwarzania sygnałów

Analiza falkowa



wykład No9



profesor PS, dr hab. inż.
Alexander Tariov
pok. 211; atariov@wi.ps.pl



Obecnie analitycy sygnału mają do dyspozycji imponujący arsenał narzędzi.

Prawdopodobnie najbardziej znanym z nich jest *analiza Fouriera*, która dzieli sygnał na sinusoidy o różnych częstotliwościach.

Dla wielu sygnałów analiza Fouriera jest nadzwyczaj użyteczna, ponieważ reprezentacja częstotliwościowa sygnału ma duże znaczenie.

Wady analizy Fouriera



Przy przekształcaniu do dziedziny częstotliwości, **tracona jest informacja o czasie.**

Kiedy patrzymy na transformatę Fouriera, nie możemy powiedzieć kiedy dane zdarzenie miało miejsce.

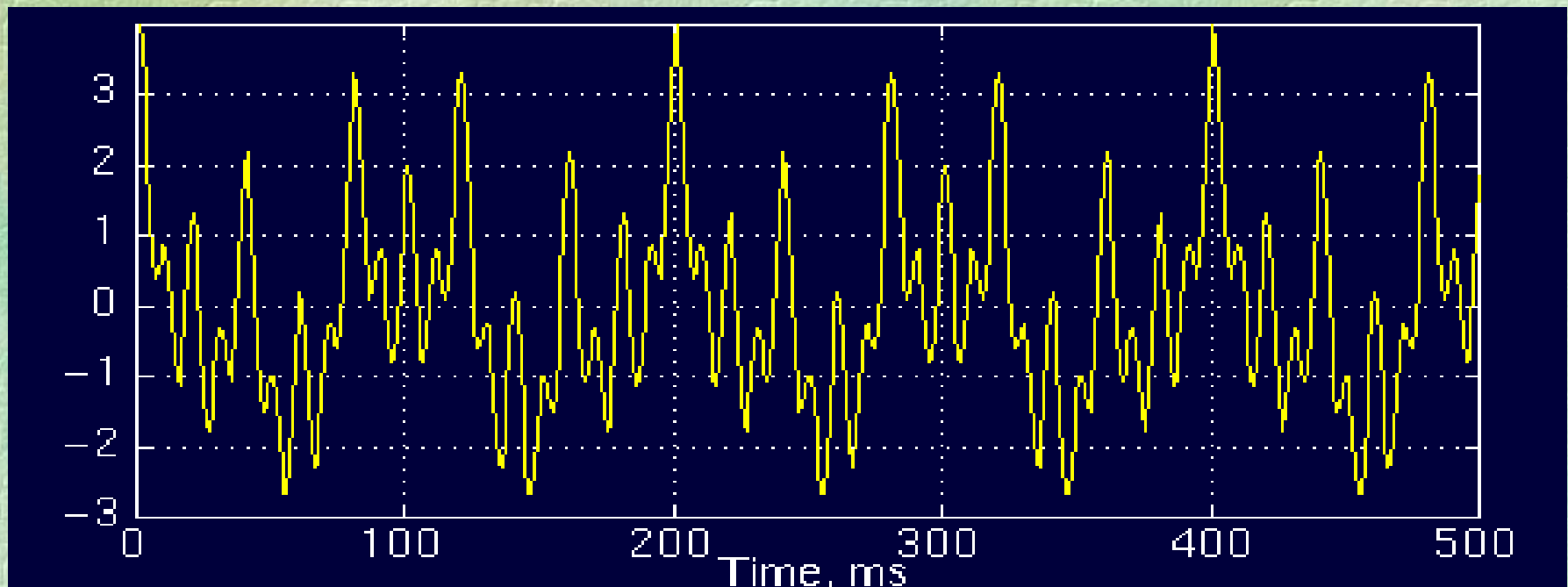
Stosowanie transformaty Fouriera przy analizie procesów niestacjonarnych daje **niedokładne** wyniki.

Jeśli właściwości sygnału nie zmieniają się w czasie – wtedy sygnał jest zwany *stacjonarnym* – to wada ta nie jest zbyt istotna.

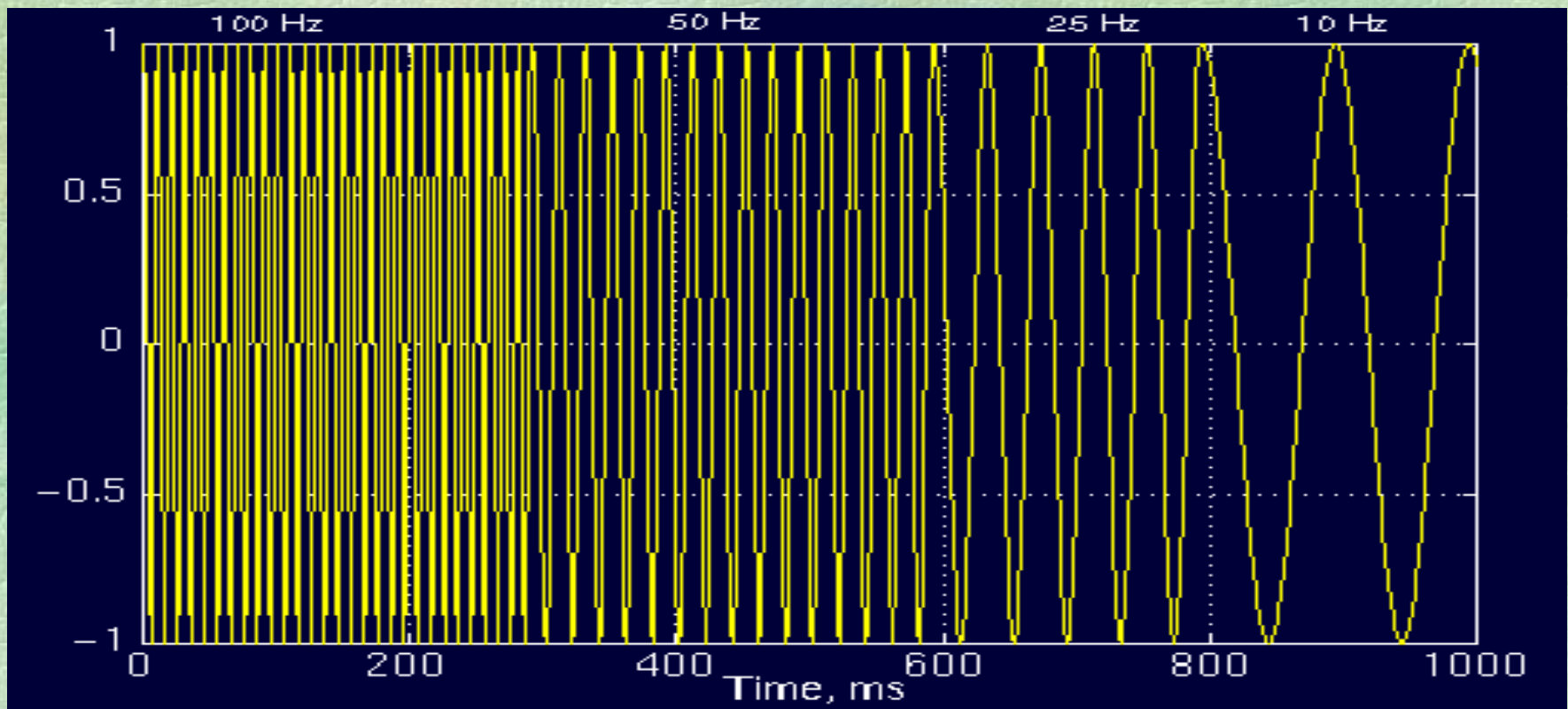
Jednakże większość interesujących sygnałów zawiera liczne niestacjonarne charakterystyki przejściowe: powolne zmiany, nagłe zmiany, początki i końce zdarzeń.

Sygnal stacjonarny

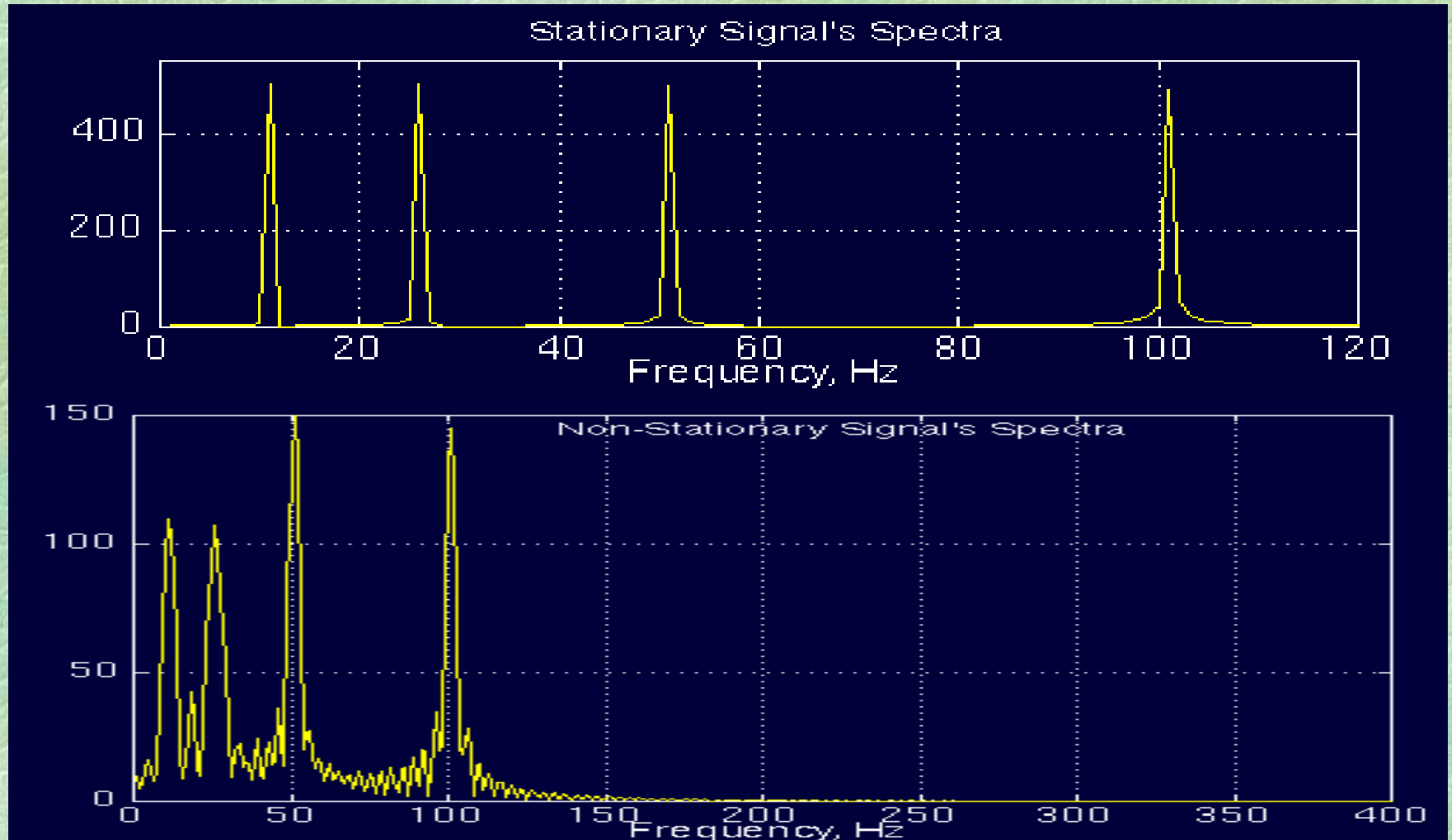
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 25t) + \cos(2\pi \cdot 50t) + \cos(2\pi \cdot 100t)$$



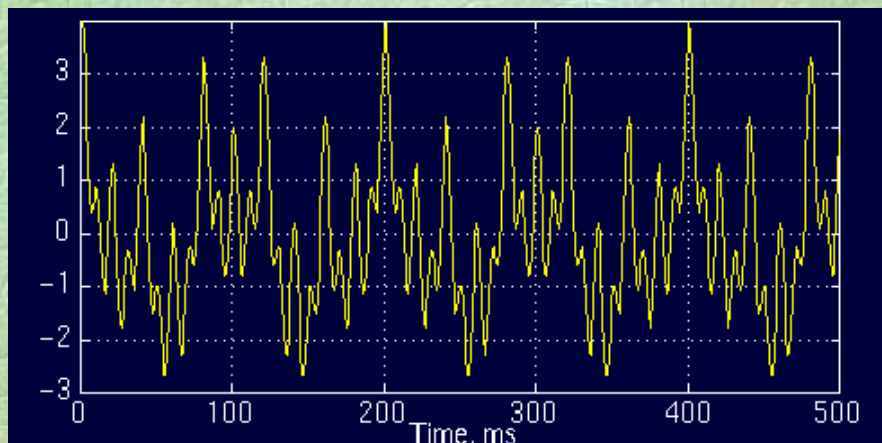
Sygnal niestacjonarny



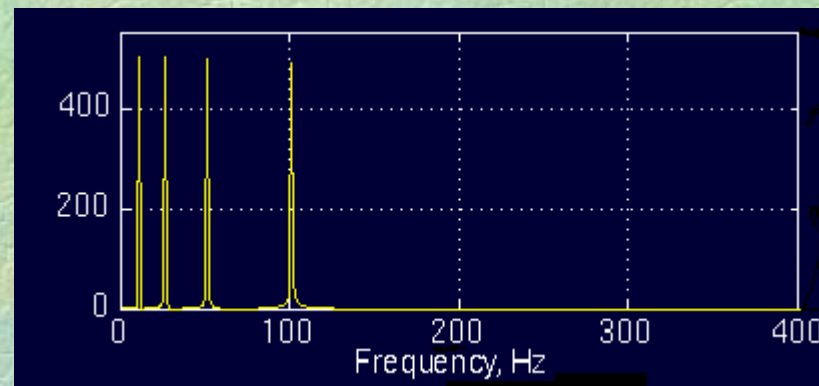
Reprezentacja widmowa



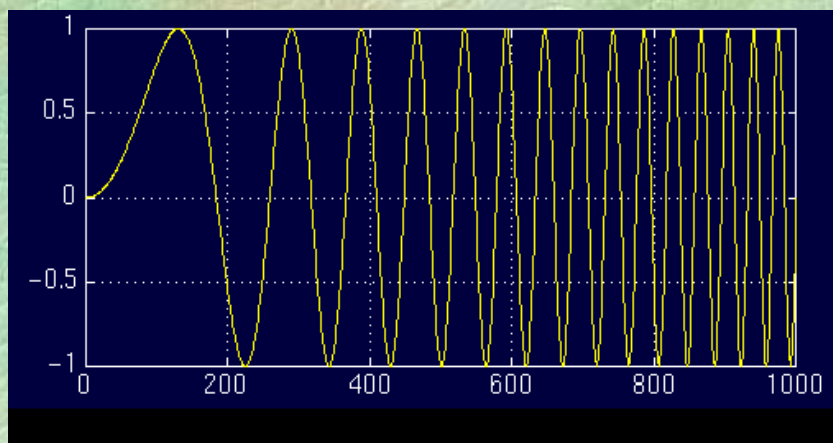
W dziedzinie czasu



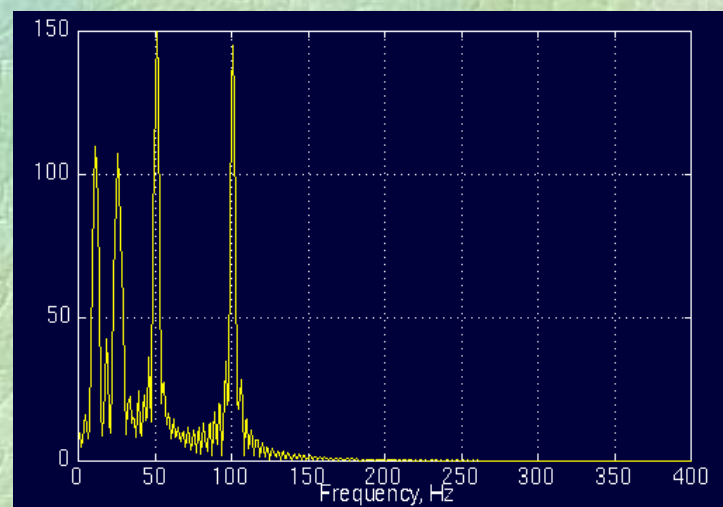
W dziedzinie częstotliwości



Sygnał stacjonarny

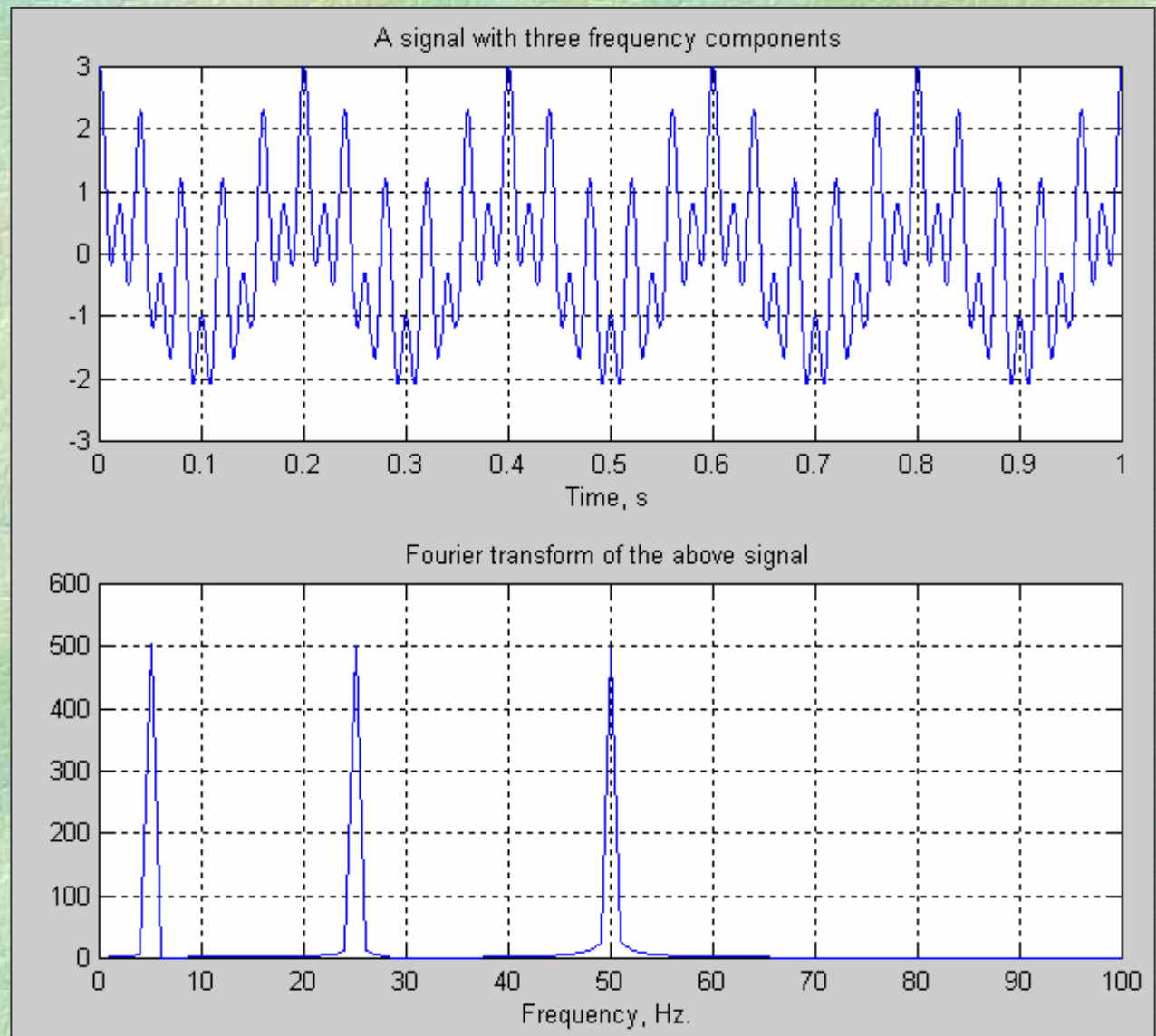


Sygnał niestacjonarny

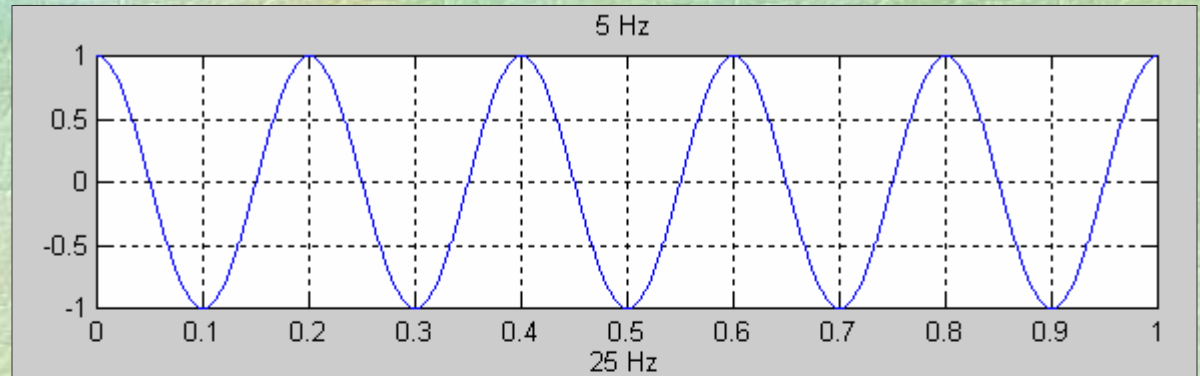


$$\begin{aligned}
 x_4(t) = & \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\
 & + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\
 & + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)
 \end{aligned}$$

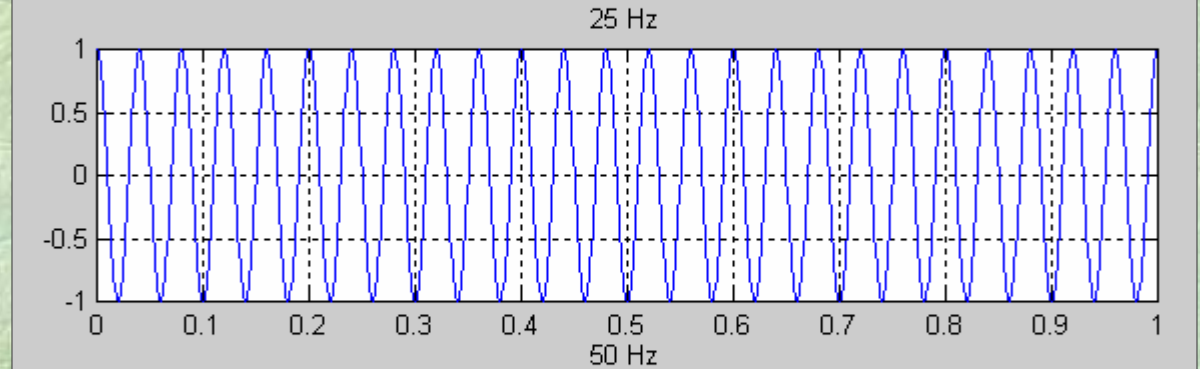
$$x_4(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_4(\omega)$$



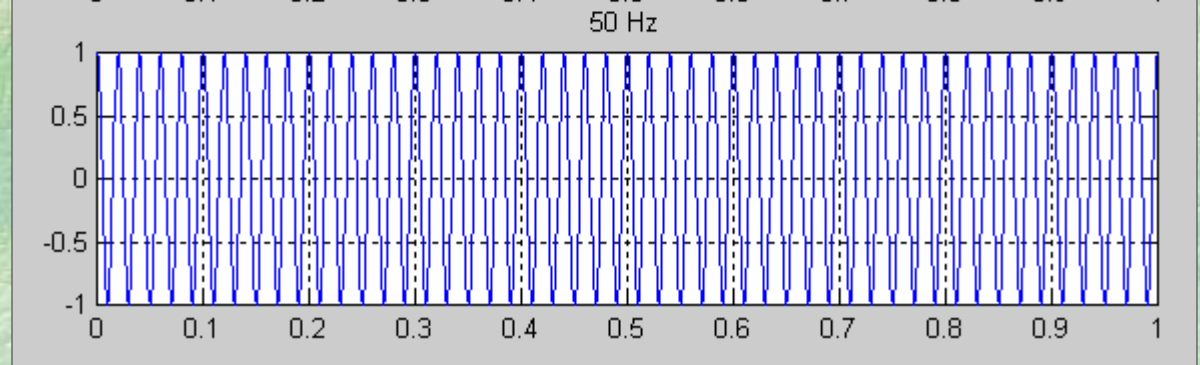
$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$$



$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t)$$



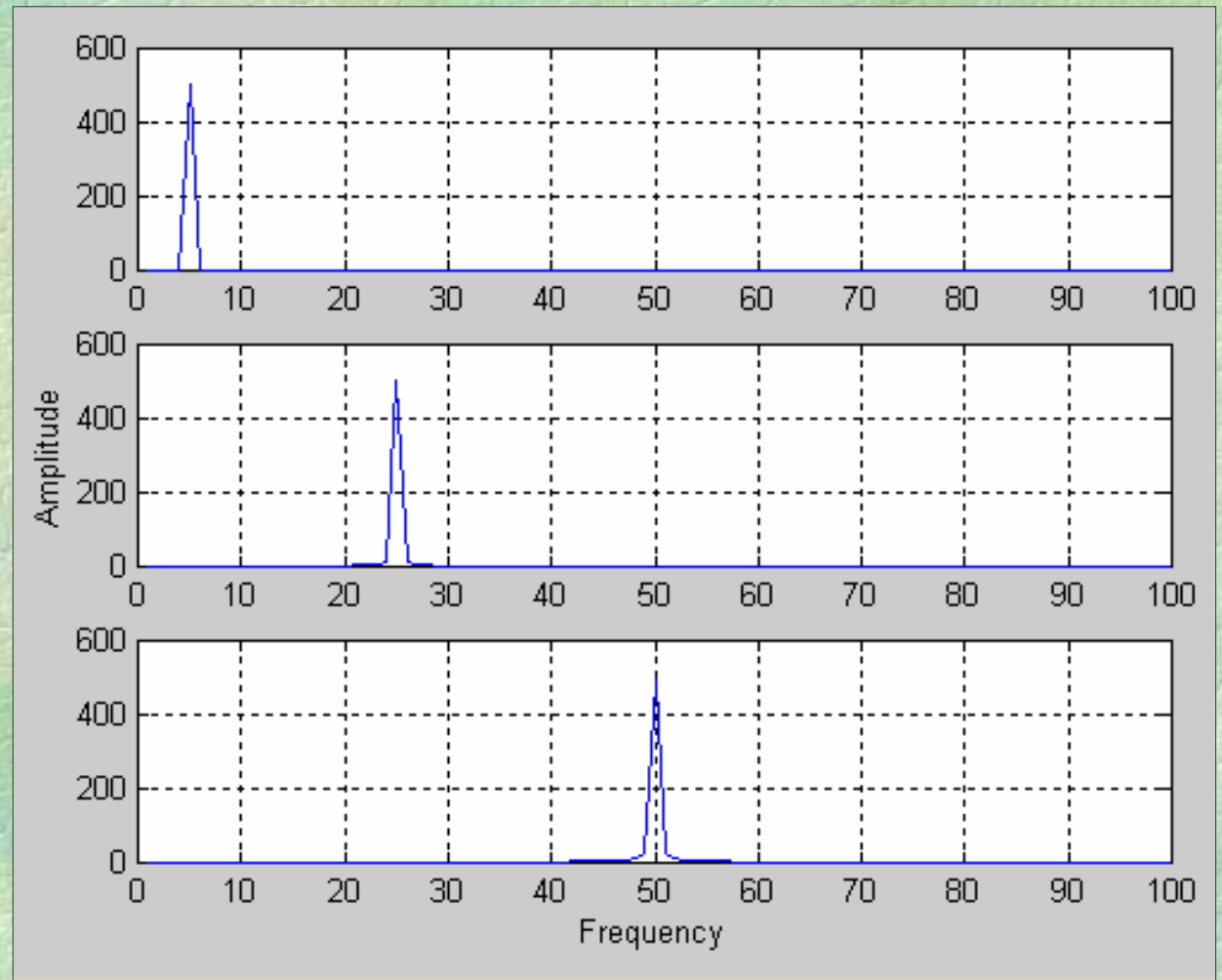
$$x_3(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$



$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$$

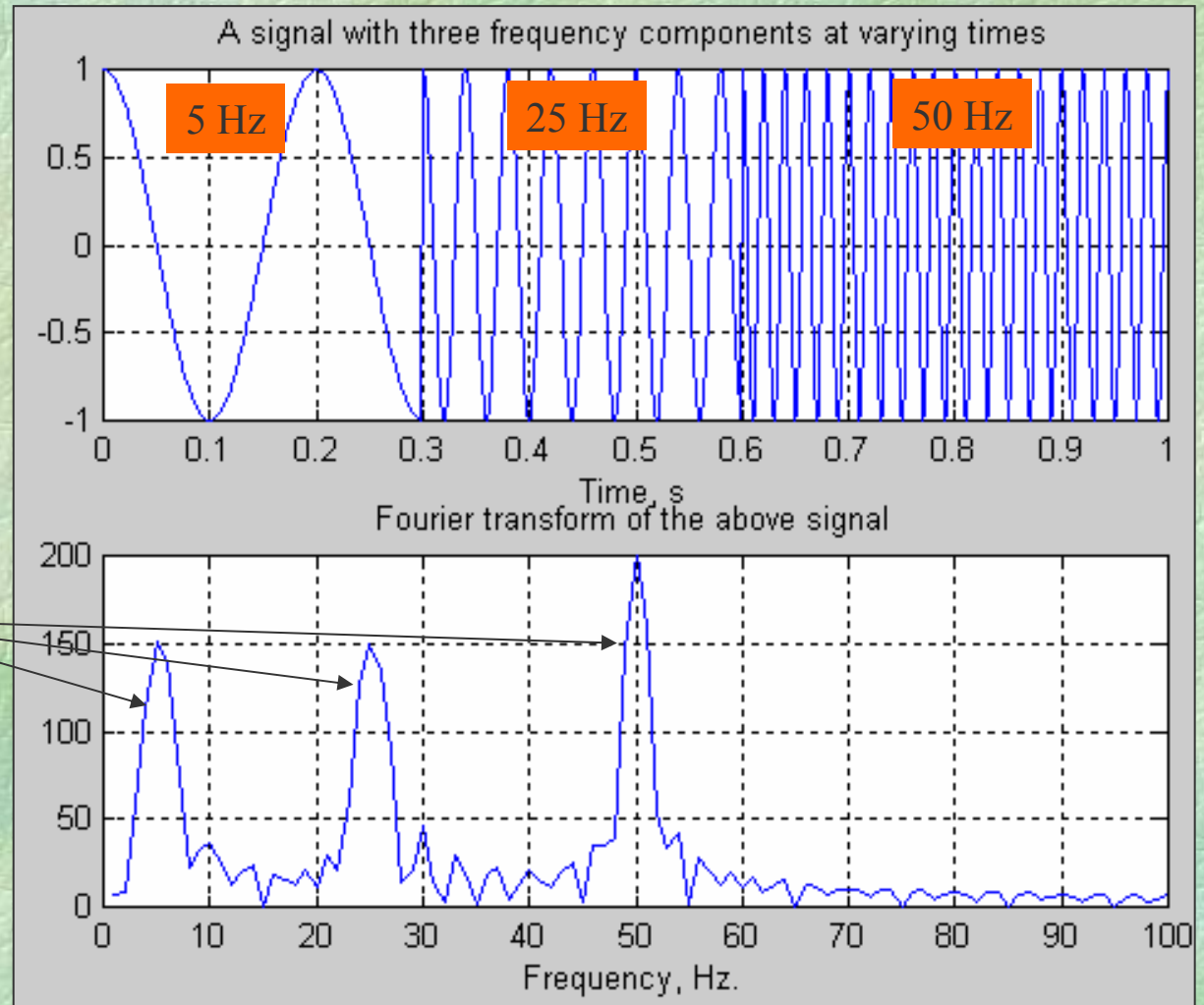
$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_3(\omega)$$



Non-stationary Signals

Perfect knowledge of what frequencies exist, but no information about where these frequencies are located in time



Analiza STFT (Short-Time Fourier Transform)

Próbując poprawić wady transformaty Fouriera, **Dennis Gabor** (1946) przystosował transformatę Fouriera do analizy tylko małej części sygnału w czasie – technika zwana *okienkowaniem* (windowing) sygnału.



D. Gabor

To przystosowanie Gabora, zwane analizą **STFT** (Short-Time Fourier Transform) przedstawia sygnał w postaci dwuwymiarowej funkcji czasu i częstotliwości.



STFT stanowi sposób kompromisu pomiędzy czasowym a częstotliwościowym przedstawieniem sygnału.

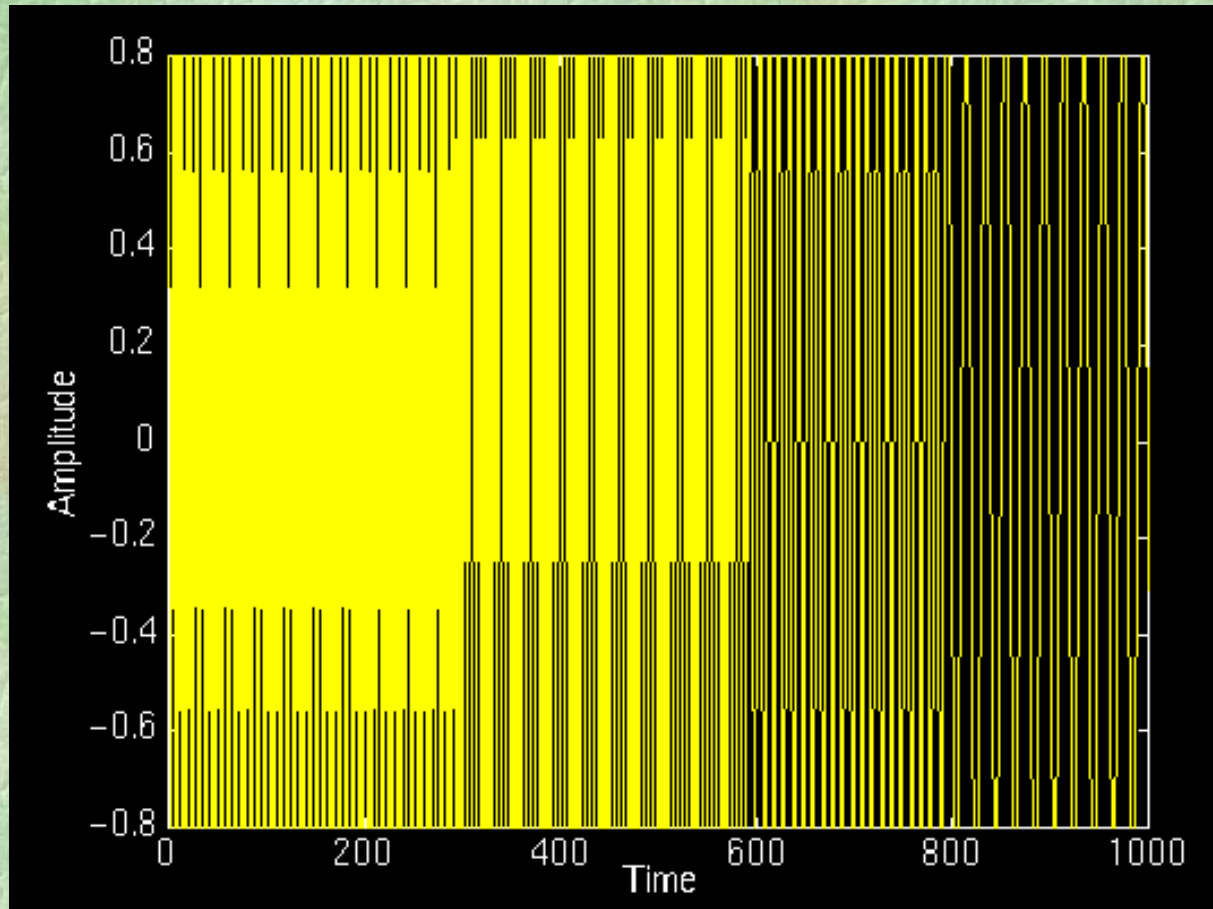
Dostarcza pewnych informacji o tym **kiedy i jakie** częstotliwości wystąpiły w zdarzeniu dotyczącym badanego sygnału.

Jednakże możemy uzyskać te informacje tylko z ograniczoną dokładnością i **dokładność ta jest zdeterminowana przez rozmiar okna.**

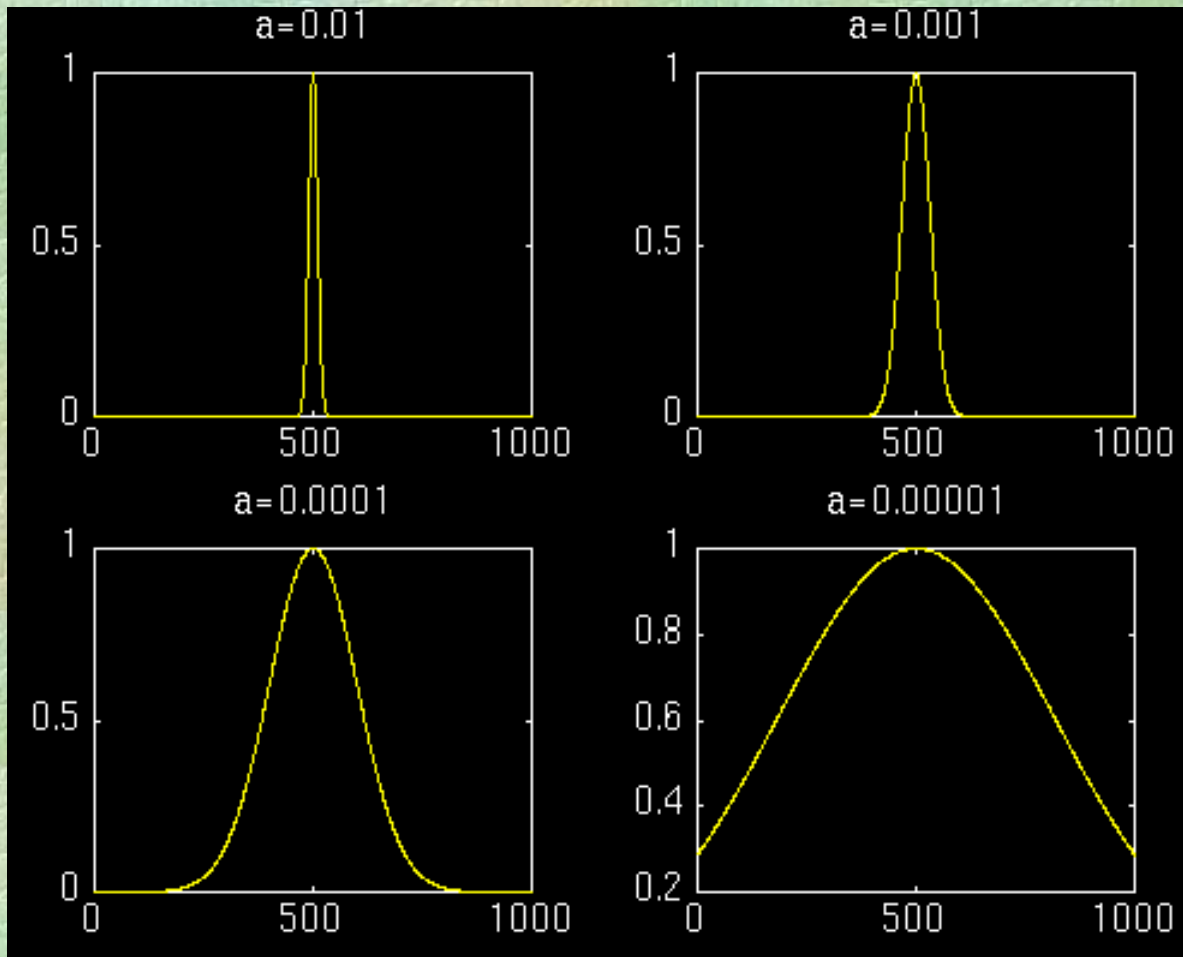


STFT Example

300 Hz 200 Hz 100Hz 50Hz

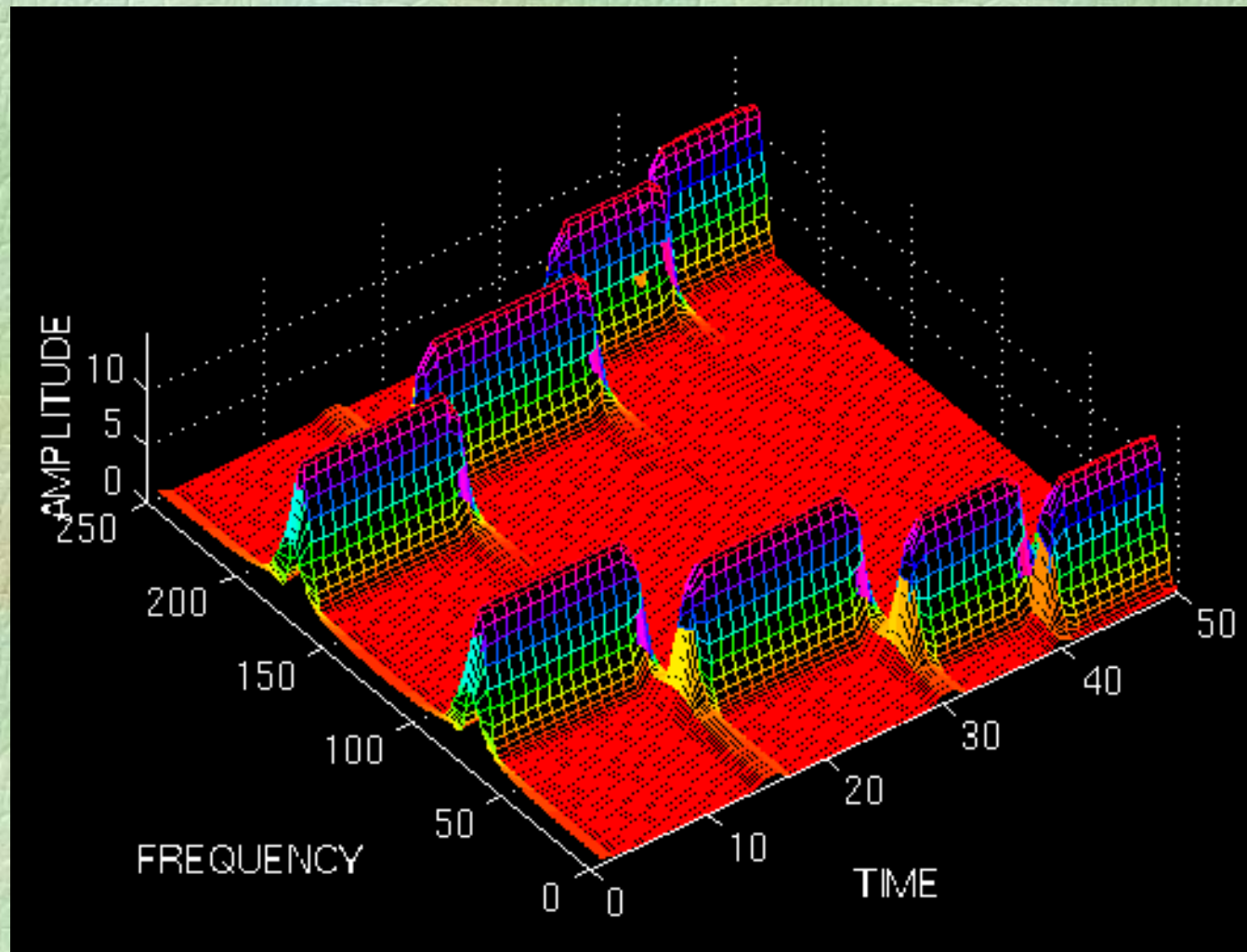


STFT Example



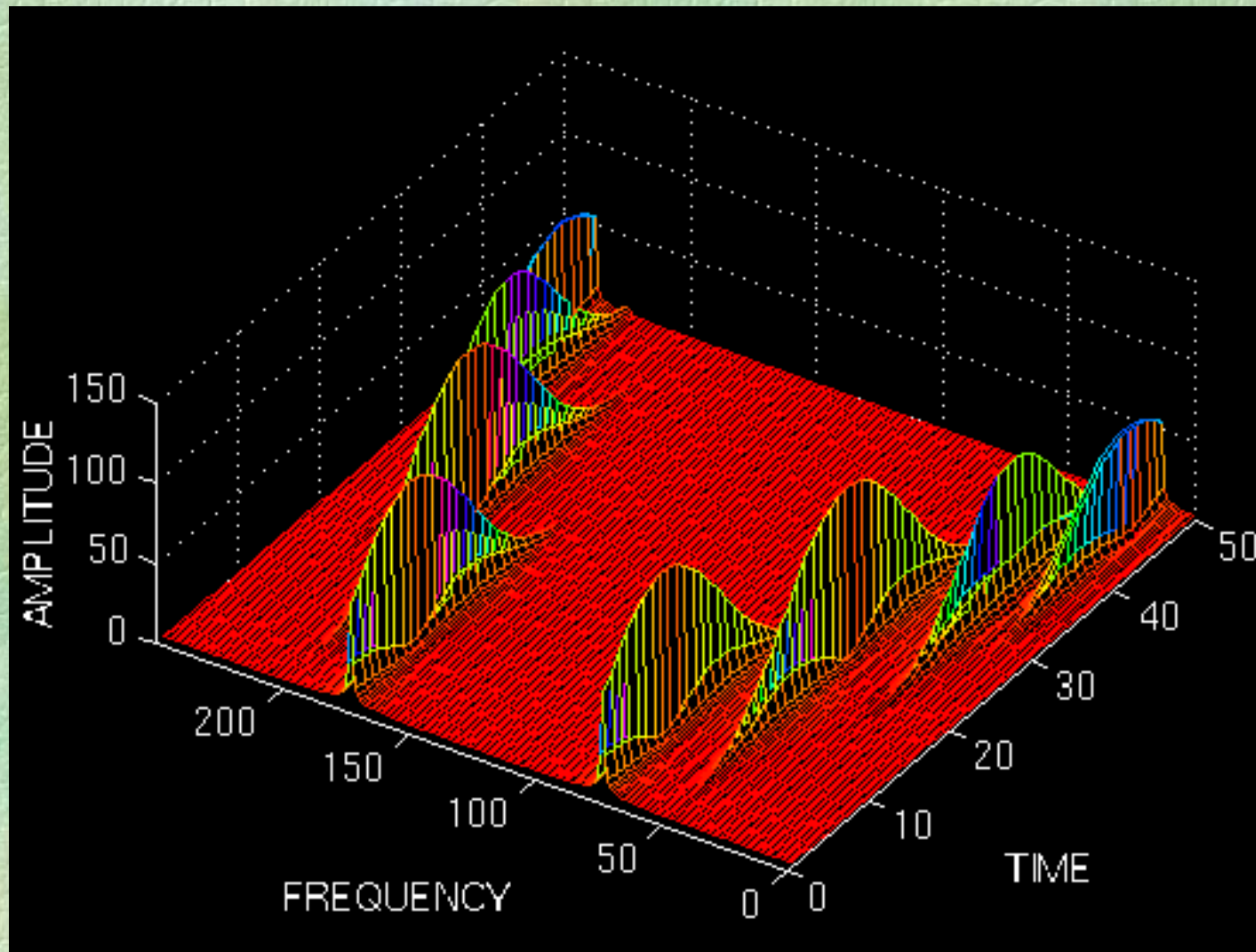
$$\gamma(t) = e^{-at^2 / 2}$$

STFT Example



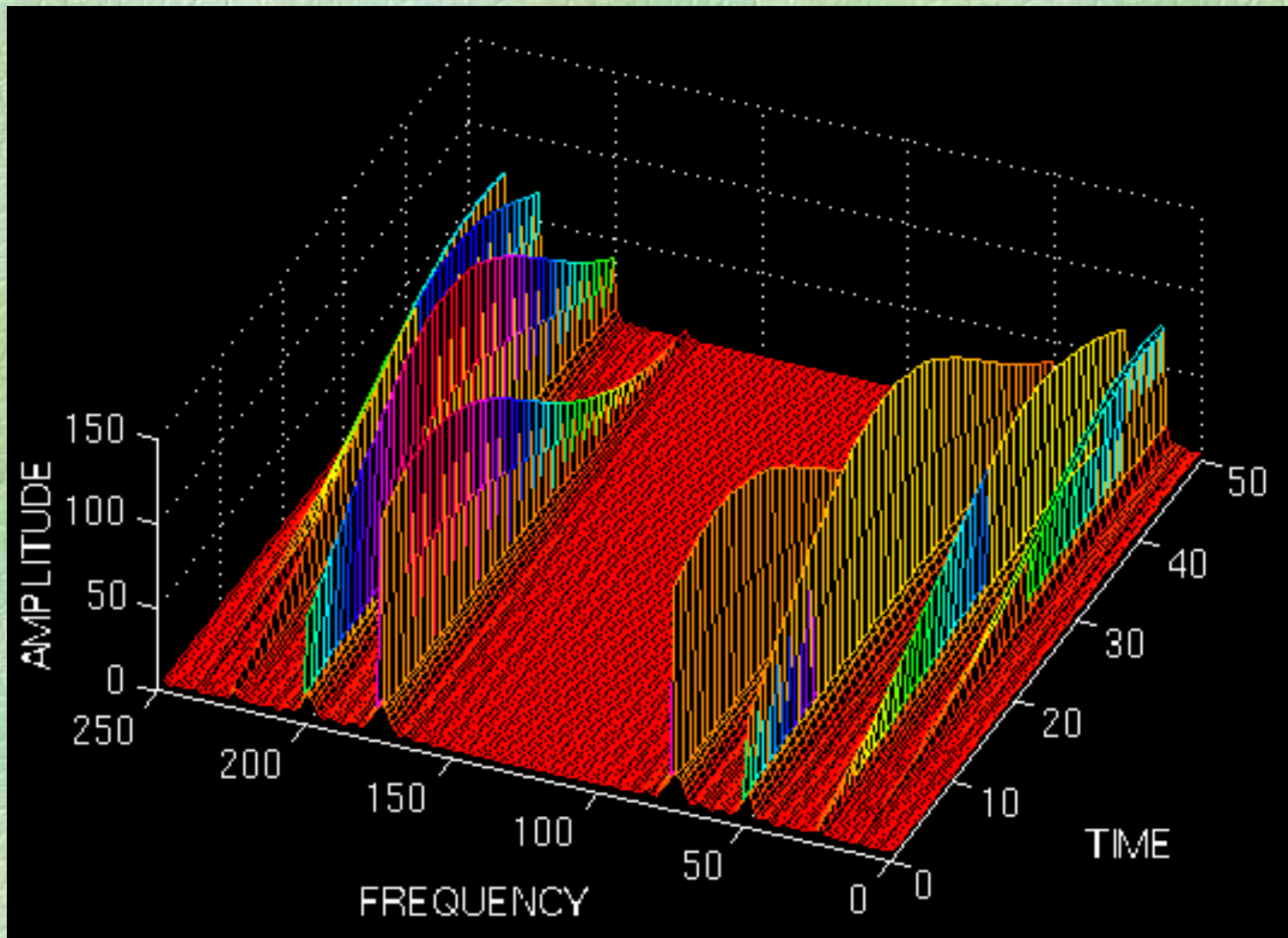
$$a=0.01$$

STFT Example



$a=0.0001$

STFT Example



$a=0.00001$

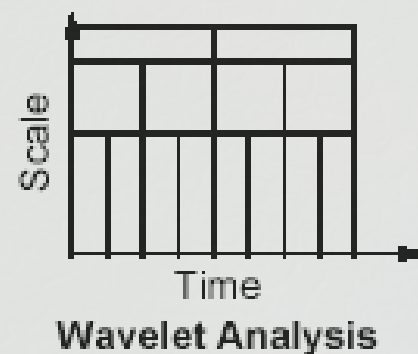
Chociaż informacje uzyskane z STFT mogą być użyteczne, wadą jest to, że jednocześnie możemy wybrać szczególny rozmiar okna czasowego, które **jest takie same** dla wszystkich częstotliwości.

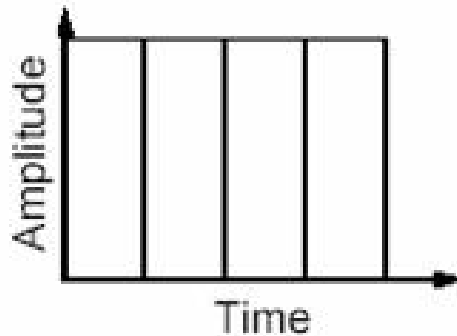
Wiele sygnałów wymaga podejścia bardziej elastycznego — gdzie możemy zmieniać rozmiar okna dla określenia bardziej dokładnie albo czasu albo częstotliwości.

Analiza falkowa

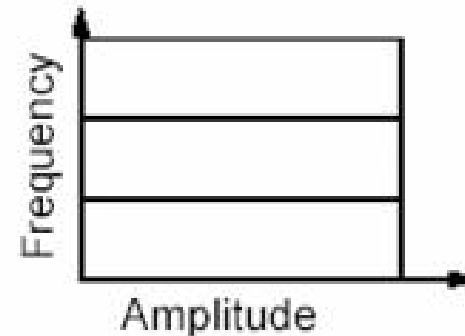
Analiza falkowa reprezentuje następny krok logiczny: technikę okienkowania **z obszarami o zmiennych rozmiarach**.

Analiza falkowa pozwala na stosowanie długich interwałów czasowych, kiedy potrzebujemy bardziej dokładnych informacji niskoczęstotliwościowych i krótszych obszarów, kiedy potrzebujemy informacji wysokoczęstotliwościowych.

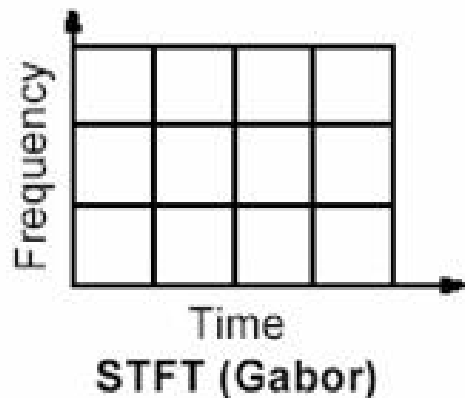




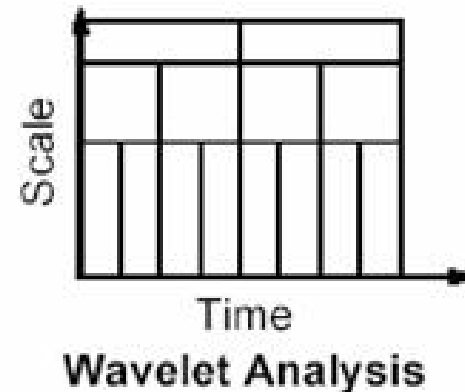
Time Domain (Shannon)



Frequency Domain (Fourier)



STFT (Gabor)



Wavelet Analysis

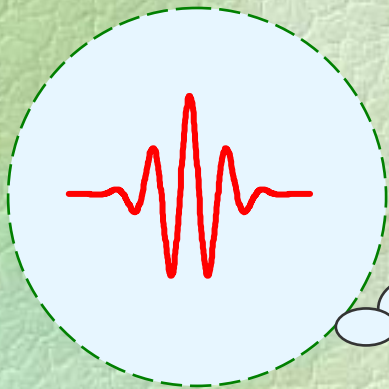
Należy zapamiętać, że analiza falkowa nie zawiera obszaru czasowo-częstotliwościowego, lecz obszar: czas-skala.

Analiza falkowa jest zdolna do odkrywania aspektów danych, które są pomijane przez inne techniki analizy sygnałów, takich jak punkty awarii, nieciągłości wyższych pochodnych, własne podobieństwo.

Ponadto, ponieważ pozwala to na inne spojrzenie na dane niż zaproponowane przez tradycyjne techniki, analiza falkowa pozwala także na kompresję i odszumianie sygnału bez jego znacznej degradacji.

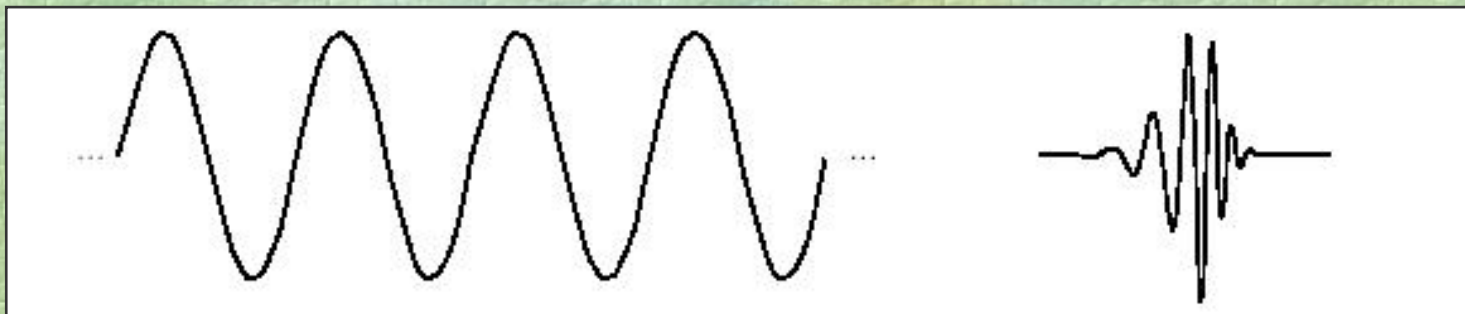
Pomimo swej krótkiej historii w dziedzinie przetwarzania sygnałów falki udowodniły, że są niezbędnym dodatkiem do kolekcji standardowych narzędzi do analizy sygnałów i wciąż kontynuują zdobywanie popularności.

Falka



Falka jest kształtem fali o ograniczonym okresie, którego średnia wartość jest równa zero.

Porównajmy falki do fali sinusoidalnych, które są podstawą analizy Fouriera.



Fala sinusoidalna

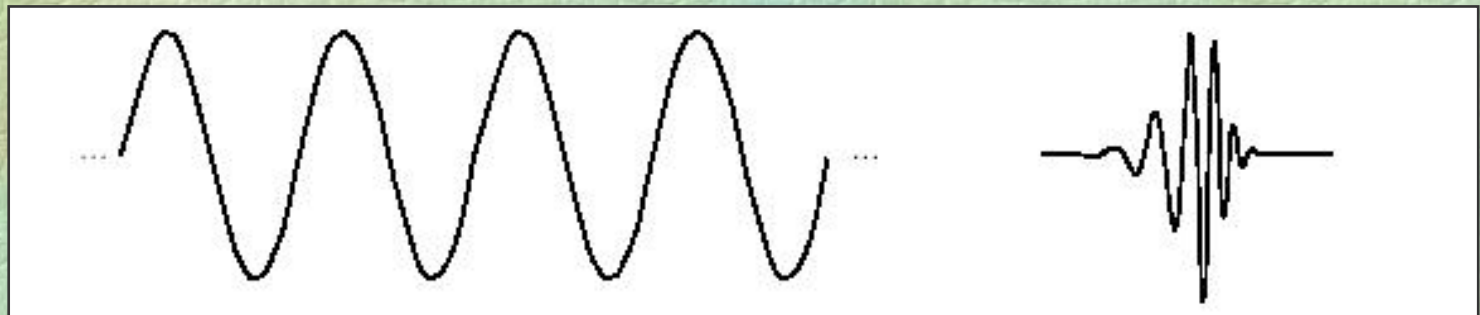
Falka db10

Sinusoidy nie mają ograniczonego okresu – rozciągają się od minus nieskończoności do plus nieskończoności.

Sinusoidy są płynne i przewidywalne, a **falki** zwykle są nieregularne i asymetryczne.

Analiza Fouriera składa się z dzielenia sygnału na fale sinusoidalne o różnych częstotliwościach. Podobnie analiza falkowa jest dzieleniem sygnału na przesunięte i przeskalowane wersje oryginalnej (macierzystej) falki.

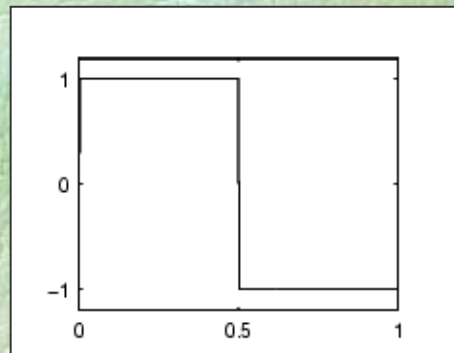
Porównując wykres falek i fali sinusoidalnych, można intuicyjnie zauważyć, że sygnały z ostrymi zmianami mogą być lepiej zanalizowane przy pomocy nieregularnej falki niż przy użyciu płynnej sinusoidy.



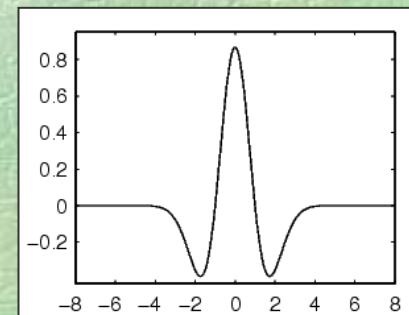
Metoda falkowa może mieć też zastosowanie dla prezentacji danych dwuwymiarowych (obrazy), a w zasadzie do danych wielowymiarowych.

Falki:

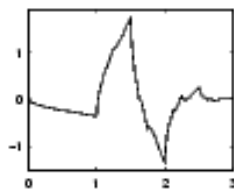
Falka
Haara
(=db1)



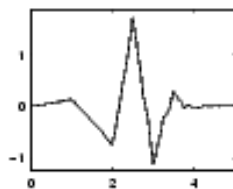
Kapelusz
Meksykański



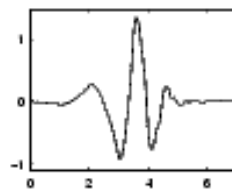
Falki Daubechies



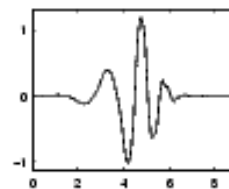
db2



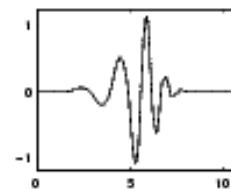
db3



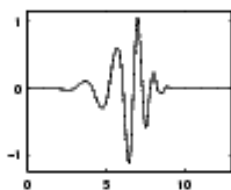
db4



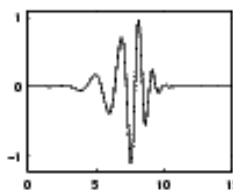
db5



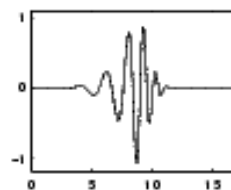
db6



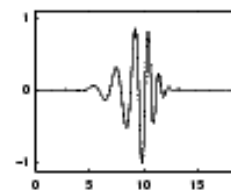
db7



db8

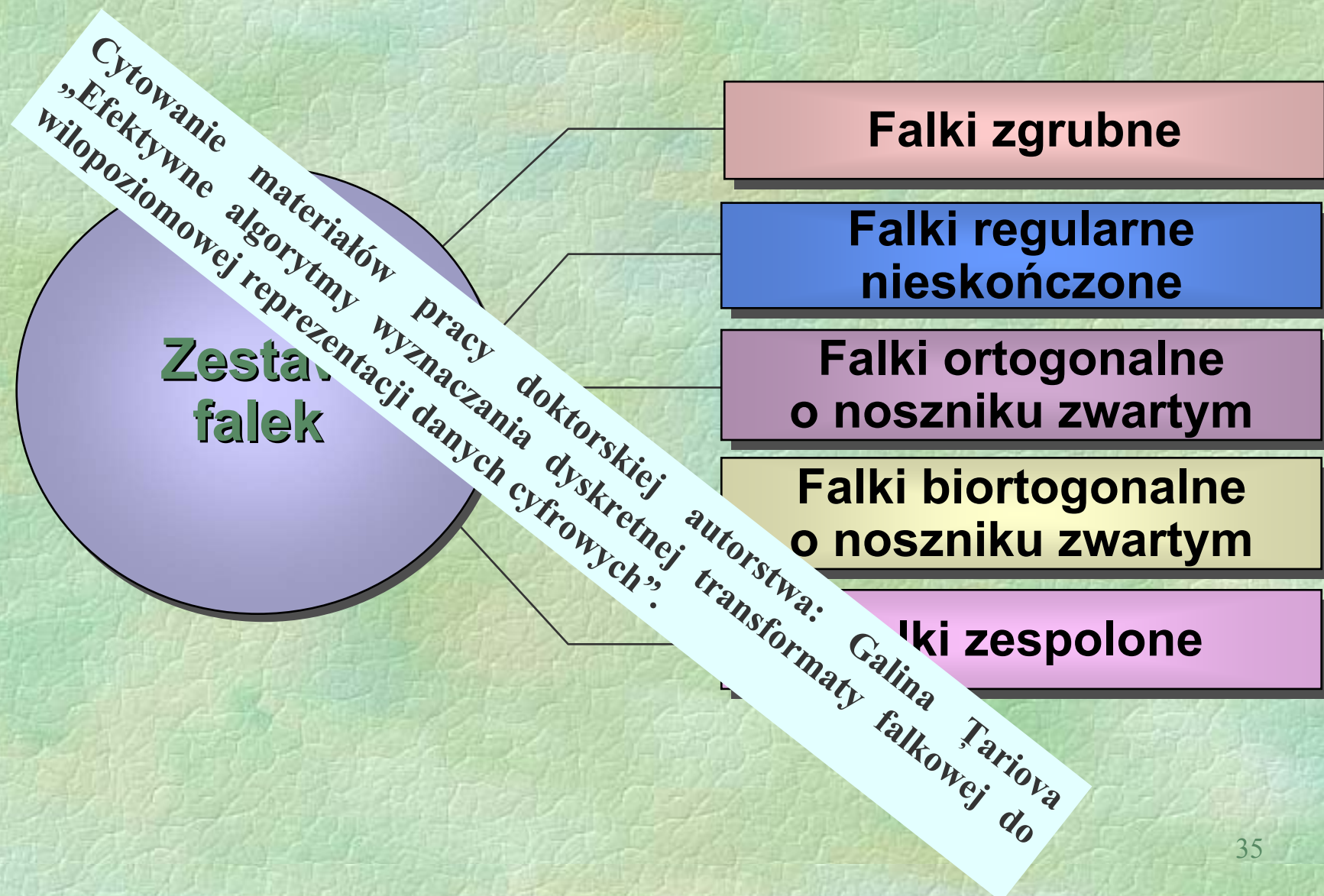


db9



db10

Klasyfikacja falek



Falki zgrubne

Falka Gaussa (Gaus)
Falka Morleta (Morl)
Falka Kapelusz Meksykański
(Mexh)

Falki regularne nieskończone

Falka Meyera ciągła (meyr)
Falka Meyera dyskretna (dmey)

Falki ortogonalne o nośniku zwartym

Falki Daubechies (dbN)
Symlety (symN)
Coiflety (coifN)

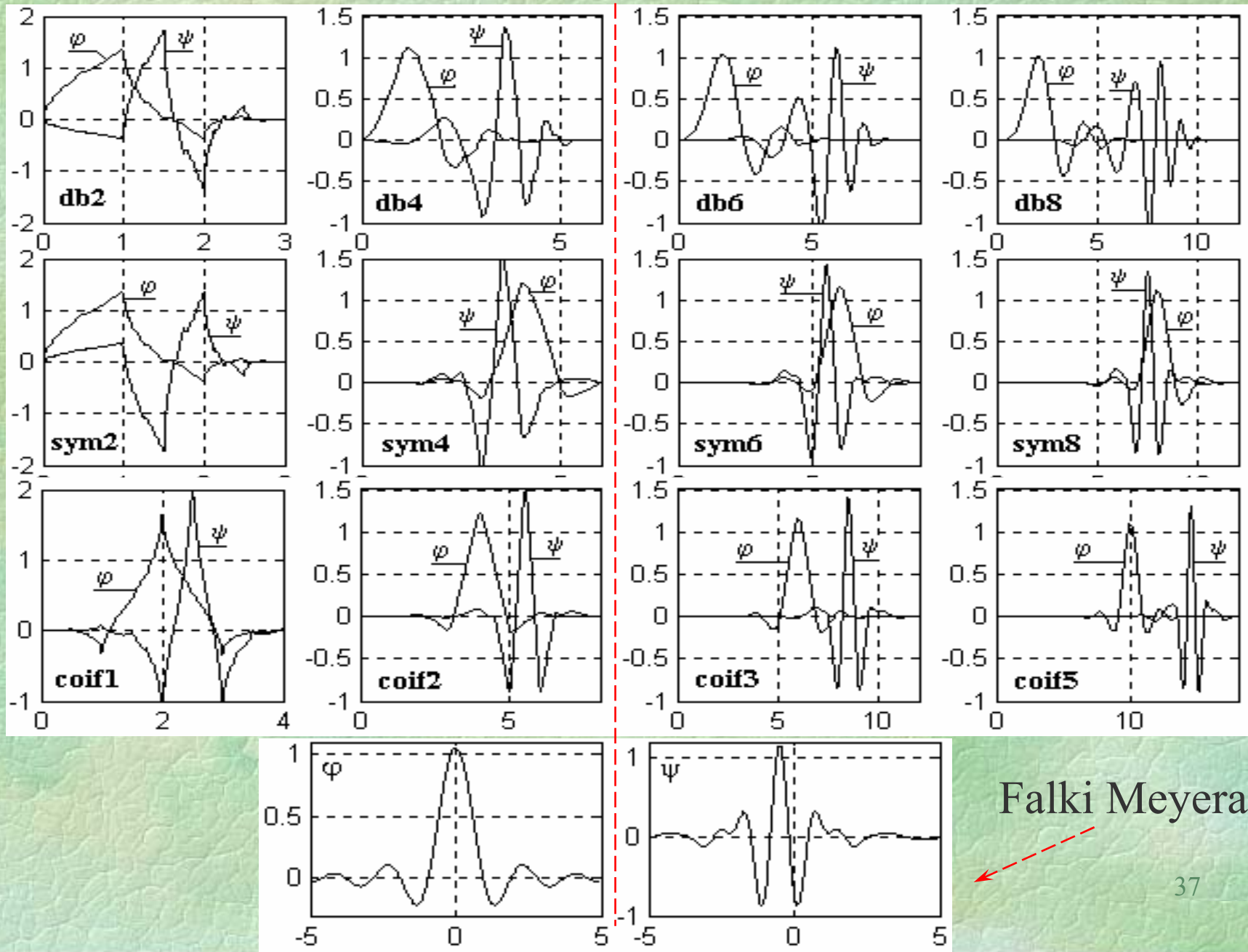
Falki biortogonalne z nośnikiem zwartym

Falki biortogonalne na podstawie B-splinów
(biorNr.Nd, rbioNr.Nd)

Falki zespolone

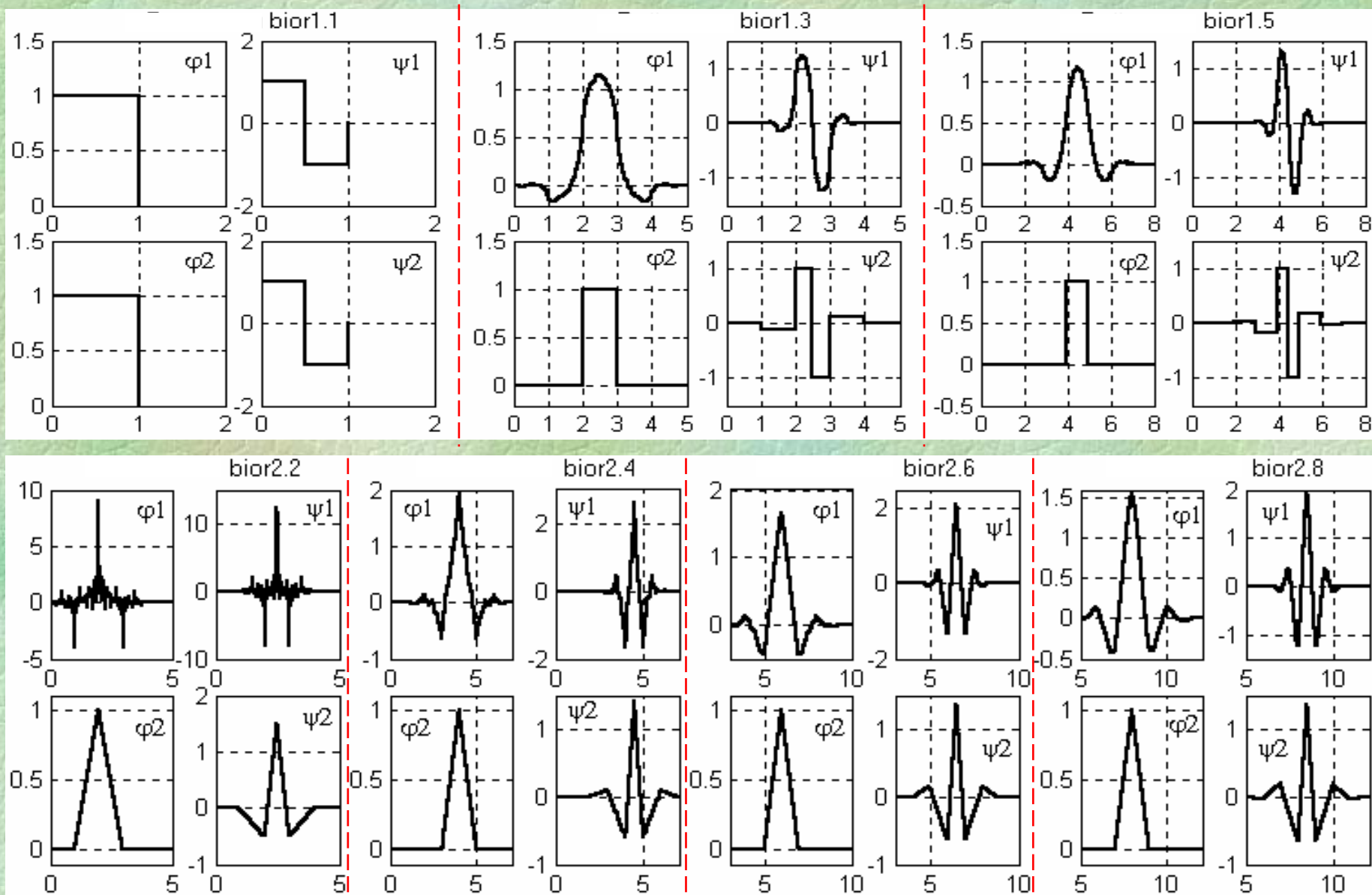
Zespolone falki Gaussa (cgauN)
Zespolone falki Morleta (cmoFb-Fc)
Zespolone falki Shannona (shanFb-Fc)
Częstotliwościowe falki zespolone na podstawie B-splinów (shanFb-Fc)

Przebiegi czasowe różnych falek

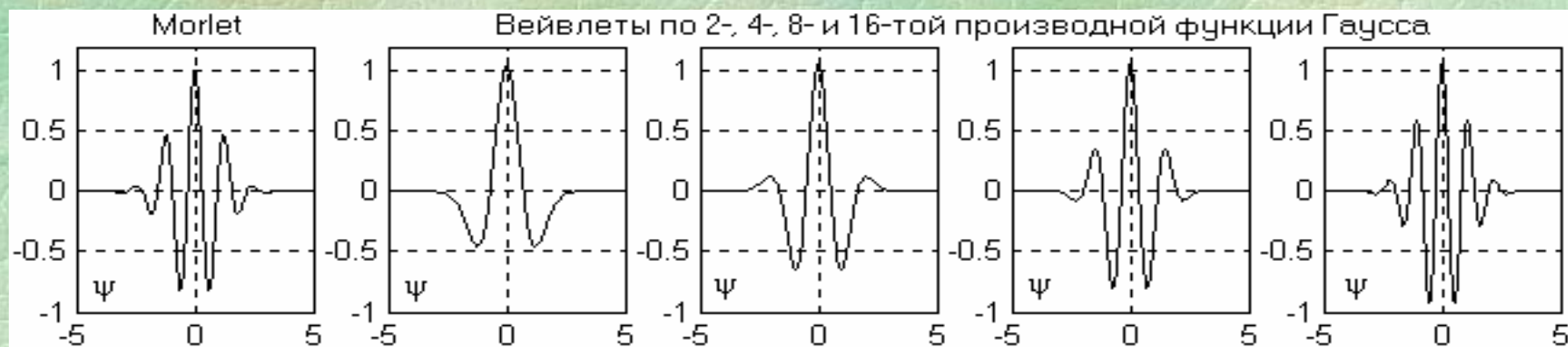
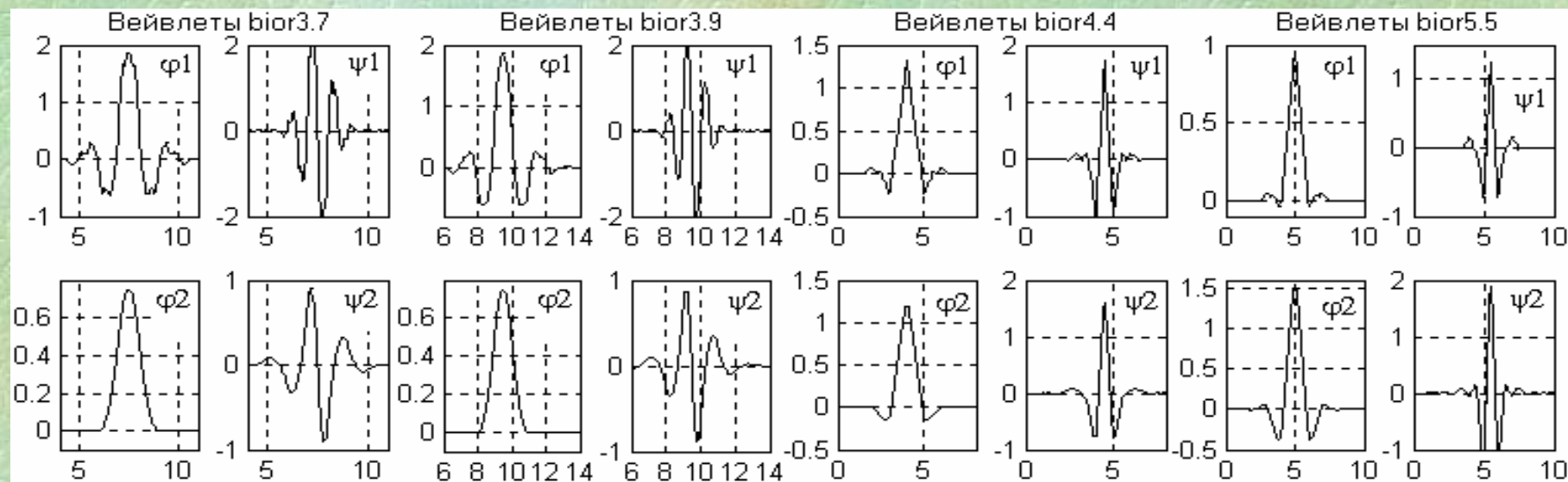


Falki Meyera

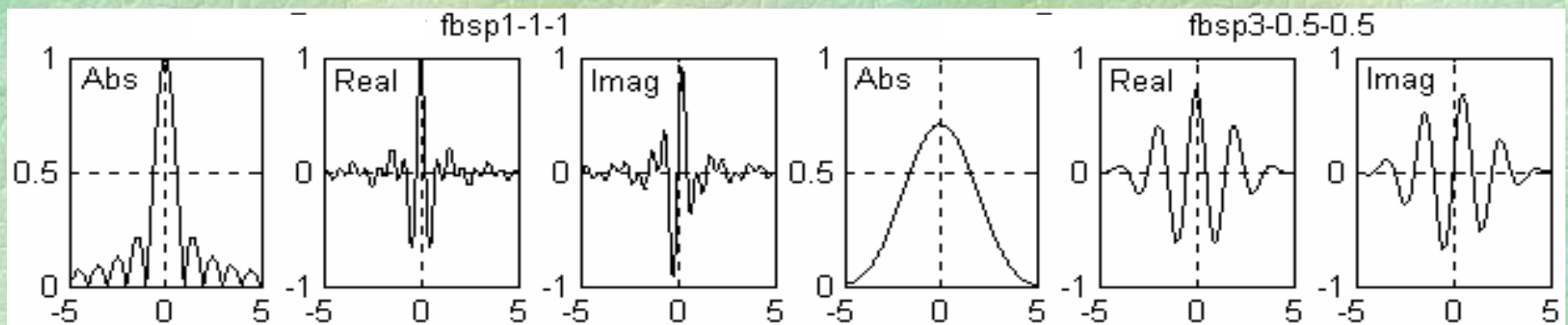
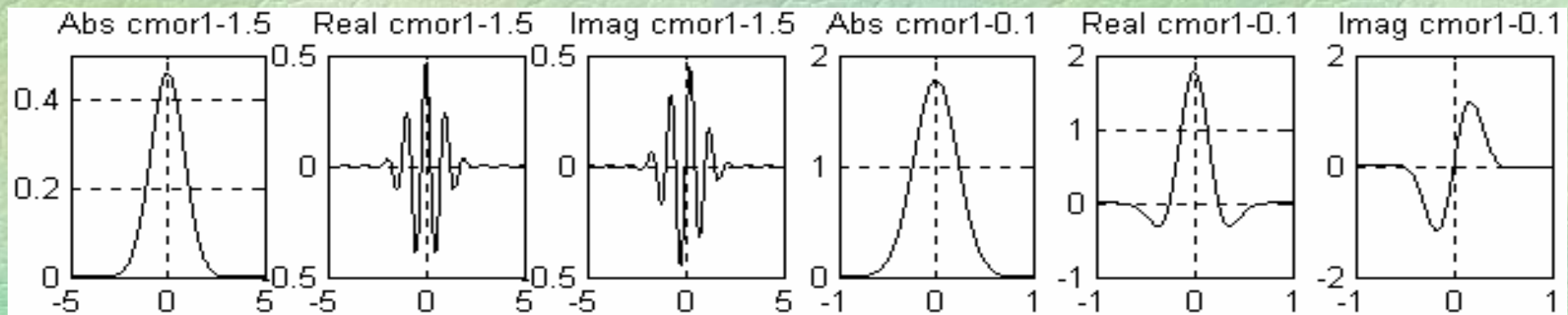
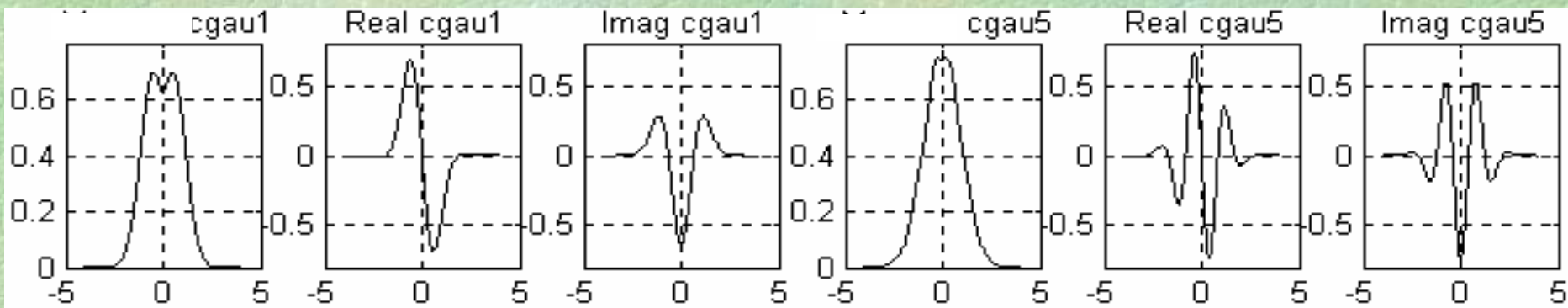
Przebiegi czasowe różnych falek cz. d.



Przebiegi czasowe różnych falek cz. d.



Przebiegi czasowe różnych falek cz. d.



Zaangażowanie analizy falkowej w dyscyplinach naukowych

Cytowanie materiałów pracy doktorskiej autorstwa: Galina Tariova
„Efektywne algorytmy wyznaczania dyskretnej transformaty falkowej do wielopoziomowej reprezentacji danych cyfrowych”.

Historia

Ekonomia

Medycyna

Geografia

Biologia

Matematyka

Fizyka

Informatyka

Geologia

Astronomia

Geneza metodologii falkowej



Rok 1807

✧ **Jean Baptiste Josef Fourier** stwierdził, że dowolną funkcję okresową lub falę można dokładnie przedstawić jako sumę nieskończoną harmonicznym o różnych częstotliwościach. Ponieważ kilku znanych naukowców miało wątpliwości, co do dokładności dowodów Fouriera, praca przez 15 lat nie była opublikowana.



Rok 1909



✧ **John von Neumann** matematyk węgierski wynalazł „bazę” funkcji, które były pierwszymi prymitywnymi falkami) (które nie były rozpoznane i traktowane w taki sposób). Funkcje te składają się z krótkich impulsów o polarności dodatniej i ujemnej, powtarzających się po krótkich impulsach o polarności ujemnej.



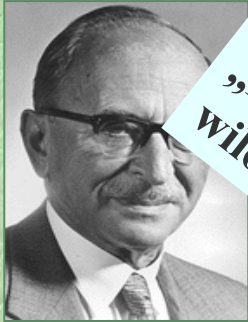
Rok 1930



✧ **John Littlewood** oraz **R. E. A. C. Paley** z Cambridge pokazali, że lokalne własności funkcji (funkcji), na przykład lokalizacja czasowa lub amplituda, może być otrzymana poprzez grupowanie składowych Fouriera.

Cytowanie materiałów pracy doktorskiej autorstwa: Galina Tariova
„Efektywne algorytmy wyznaczania dyskretnego transformaty falkowej do wielopoziomowej reprezentacji danych cyfrowych”

Geneza analizy falkowej cz.d



✧ **Dennis (Denes) Gabor** fizyk anglo-węgierski, twórca holografii, zaproponował dekomponować sygnały w pakiety czasowo-częstotliwościowe tak zwane „chirpy” Gabora.



Rok 1976



✧ **John D. Allen** oraz **Daniel Esteban** zaproponowali „kodowanie” – sposób kodowania transmisji cyfrowych.



Rok 1981



✧ **Jean Morlet**, inżynier naftowy z firmy Elf-Aquitaine, proponuje sposób kodowania sygnałów sejsmicznych w coś, co otrzymamy po przetworzeniu w zwartym. Zwraca się on do fachowców z fizyki kwantowej Alexa Grossmana, żeby ten po prostu sprawdził, iż ta metoda jest poprawna.

Geneza analizy falkowej cz.d



1984



J. Morlet i A. Grossman po raz pierwszy wprowadzają do leksykonu matematycznego słowo „wavelet”, czyli „falka”.



Rok 1985



A. Grossman na Uniwersytecie w Paryżu syntezował pierwsze fale ortogonalne (smooth orthogonal wavelets).



Rok 1986



Stéphane Mallat, matematyk pracujący w tych czasach na uniwersytecie w Paryżu, pokazał, że baza Haara, oktawy Littlewooda-Paley, fale Gabor oraz filtry podpasmoste Galanda-Estera można wyrazić w baz falkowych. Po raz pierwszy wprowadził analizę wielorozdzielczą (multiresolution analysis).

Cytowanie materiałów pracy doktorskiej autorstwa: Galina Tarivava „Efektywne algorytmy wyznaczania dyskretnej transformaty falkowej do wielopoziomowej reprezentacji danych cyfrowych”.

Geneza analizy falkowej cz.d



1987

Cytowanie „Efektywne algorytmy w ilopoziomowej reprezentacji danych dyskretnych”



Ingrid Daubechies skonstruowała pierwsze wygładzające falki ortogonalne z nośnikiem zwartym. Jej osiągnięcia doprowadziły teorię do postaci „instrumentu praktycznego”, który mógł teraz już zostać łatwo zaprogramowany oraz wykorzystany przez pracowników naukowo-technicznych bez angażowania w to zbyt skomplikowanego aparatu matematycznego.



Rok 1990



Iain Johnstone z uniwersytetu w ... oraz ... falki do oczyszczania obrazów z szumem.



Rok 1990



Mladen Victor Wickerhaas ... podstawy teoretyczne syntezy oraz stosowania ...

Galina Tariova ... falkowej do

Geneza analizy falkowej cz.d



✧ **Tom Hopper** z FBI's Criminal Justice Information Services Division, oraz **Jonathan Bradley** i **Chris Brislawn** z Los Alamos National Laboratory opracowali metodę zastosowania falek do kompresji odcisków palców.



Rok 1995



✧ Pixar produkuje „Toy Story” – pierwszy film stworzony komputerowo. W następnym odcinku: „Toy Story 2” – nowe bryły zostały zabarwione „w przesłach dyskretnych”, co z matematycznego punktu widzenia jest idealne do zastosowania falek.



Rok 1999



✧ ISO wprowadza nowy standard kompresji obrazów **JPEG-2000**, który wykorzystuje transformaty falkowe do kompresji plików video 1:200 bez widocznego pogorszenia jakości.

Wybitni naukowcy w dziedzinie technologii falkowych*

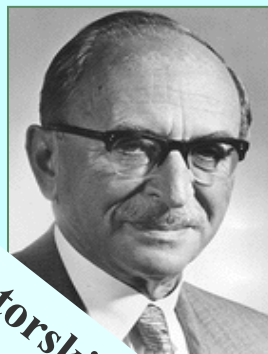
Galeria zdjęć z pracy doktorskiej G. Tariova „Efektywne algorytmy do wielopoziomowej wyznaczania dyskretnej transformaty falkowej reprezentacji danych cyfrowych”.



Alfred Haar



John Littlewood



Antoni Zygmund



Jean Morlet



Alex Grossman



Yves Mejer



Stéphane Mallat



Ingrid Daubechies



David L. Donoho



Victor S. Sauer

Autorzy najbardziej popularnych monografii, oraz znani badacze z dziedziny falek



Ronald Coifman



Martin Vetterli



G. Tariva



Sidney Burrus



Charles K. Chui



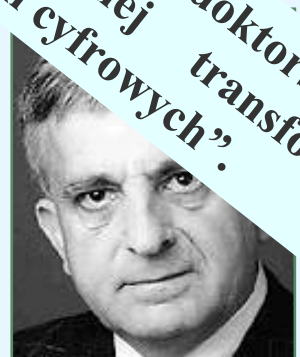
Jan Białasiewicz



Raghuveer M. Rao



Alfred K. Louis



Christian Blatter



John J. Bratteli



Truong Nduyen



P. Wojtaszczyk



Andrew K. Chan



Vasily Strela



Iain Johnstone



R. Todd Odden



P.P. Vaidyanathan



P.P. Vaidyanathan

Galeria zdjęć z pracy doktorskiej „Efektywne algorytmy do wyznaczania dyskretnej transformaty falkowej w iloczynowej reprezentacji danych cyfrowych”

Ciągła transformata falkowa

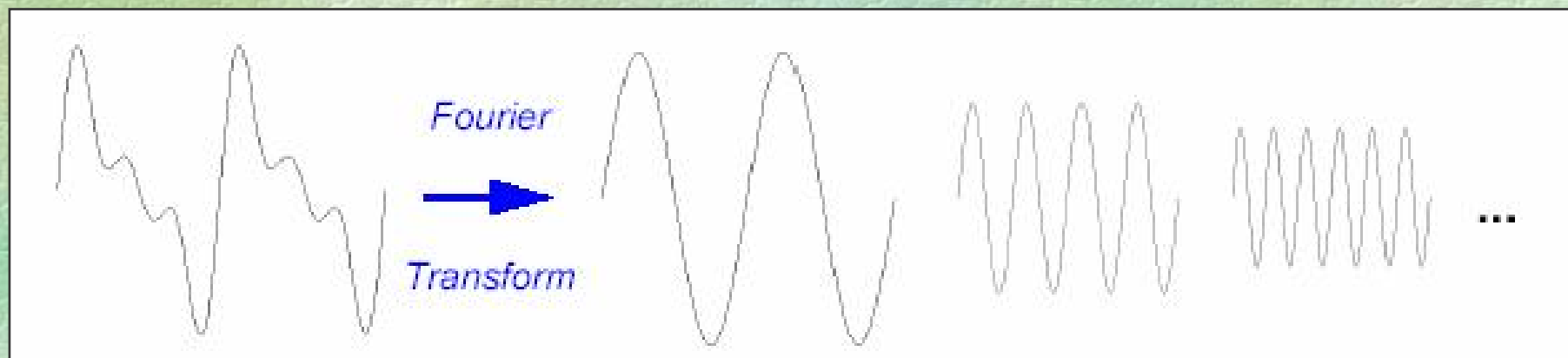
Matematycznie proces analizy Fouriera jest przedstawiony przy pomocy *transformaty Fouriera*:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

która jest sumą po całym okresie sygnału $f(t)$ wielokrotnionego o zespoloną funkcję wykładniczą*.

*(Zespolona funkcja wykładnicza może być podzielona na rzeczywistą i urojoną część sinusoidalną).

Wynikiem transformaty są *współczynniki Fouriera* $F(\omega)$, które pomnożone przez sinusoidę o częstotliwości ω dają składowe sinusoidalne oryginalnego sygnału.



Sygnał

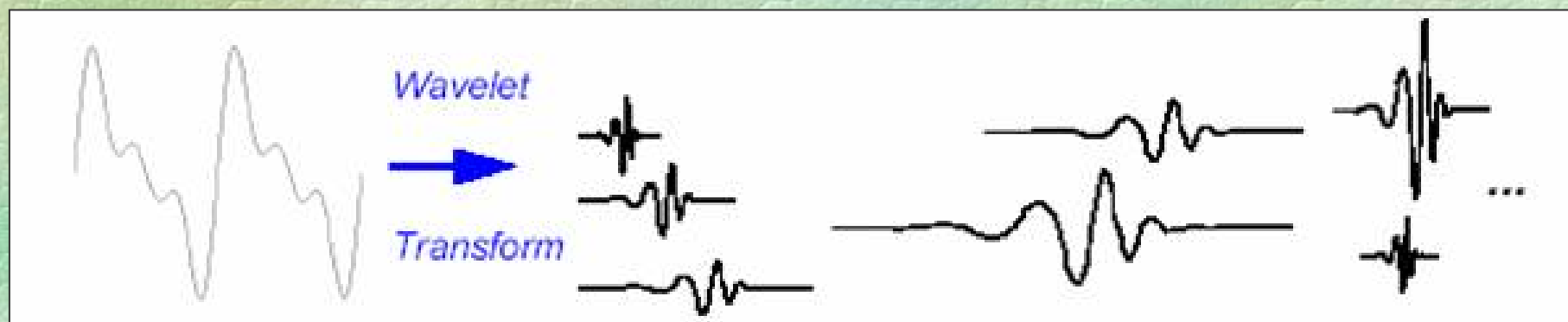
Składniki sinusoidalne o różnych
częstotliwościach

Podobnie ciągła transformata falkowa (continuous wavelet transform - CWT) jest zdefiniowana jako suma po całym czasie sygnału zwielokrotnionego o przeskalowaną, przesuniętą wersję funkcji falkowej ψ :

$$C(\textit{skala}, \textit{położenie}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi(\textit{skala}, \textit{położenie}, t) dt$$

Wynikiem CWT jest wiele *współczynników falkowych* C , które są funkcją skali i położenia.

Zwielokrotnienie każdego ze współczynników o odpowiednio przeskalowaną i przesuniętą falkę daje składowe falki oryginalnego sygnału:



Sygnał

Składowe falki o różnych
skalach i położeniach

Ciągła transformata falkowa

$$CWT_x^{(\psi)}(a, b) = W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

Funkcja macierzysta

Przesunięcie

CWT of $x(t)$ at scale a and translation b

Note: low scale $\rightarrow$ high frequency

Współczynnik normalizujący

Skalowanie
Changes the support of the wavelet based on the scale (frequency)

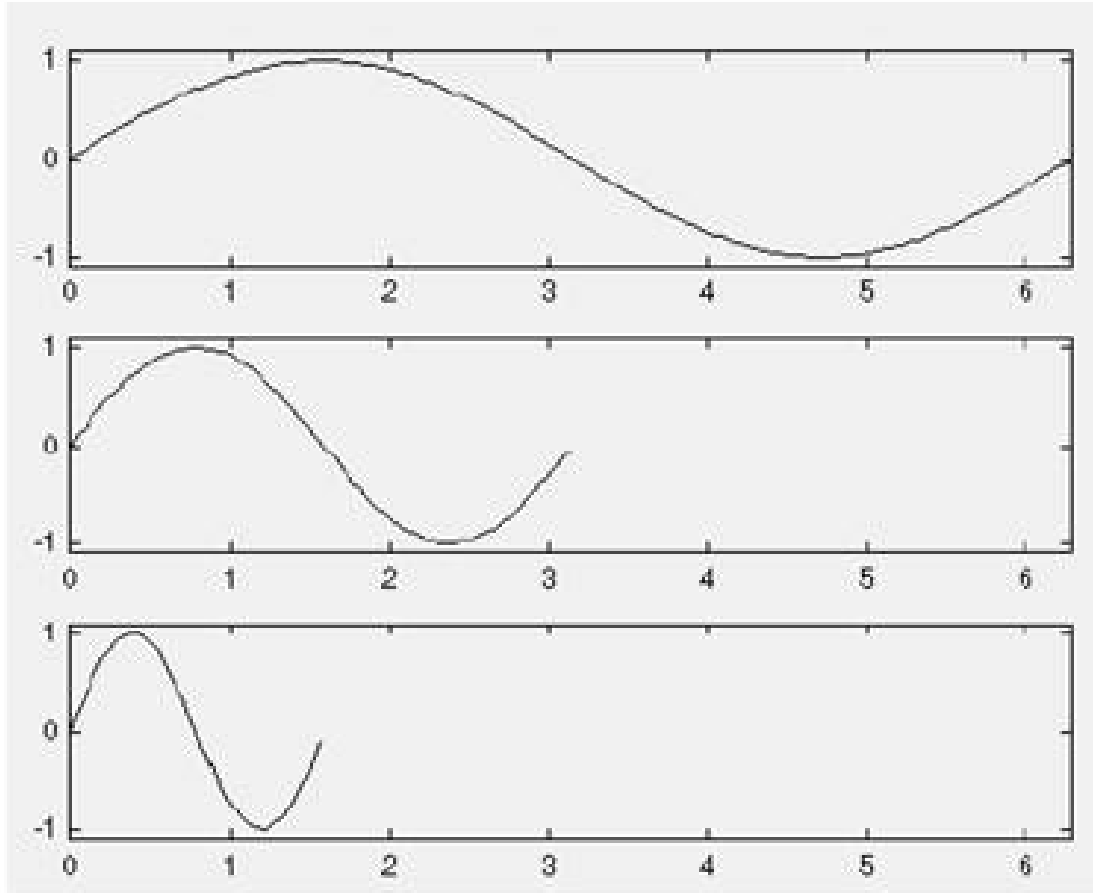
Skalowanie

Co właściwie rozumiemy mówiąc *skala* w tym kontekście?

Skalowanie falki oznacza po prostu jej rozciąganie (lub ściskanie).

Idąc dalej wprowadzimy pojęcie współczynnika skali (scale factor), często oznaczanego literą *a*.

W przypadku np. sinusoid efekt współczynnika skali jest bardzo łatwo zobaczyć:

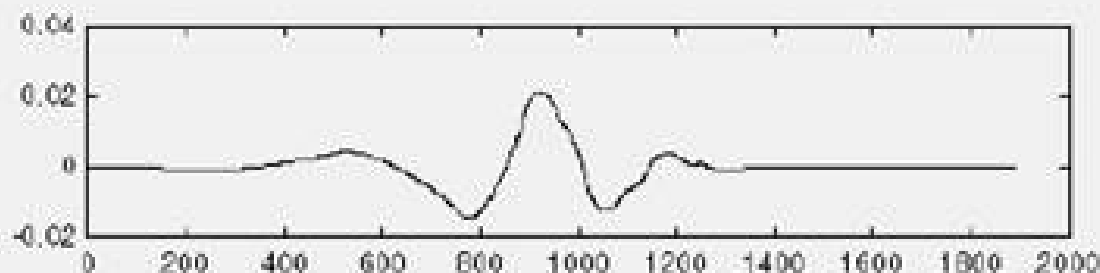


$$f(t) = \sin(t) ; a = 1$$

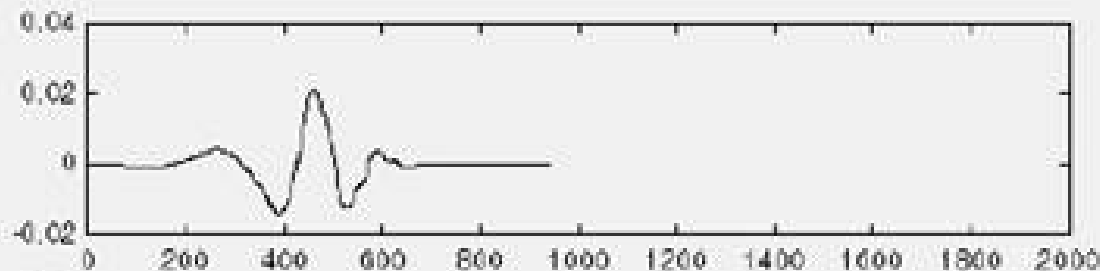
$$f(t) = \sin(2t) ; a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \sin(4t) ; a = \frac{1}{4}$$

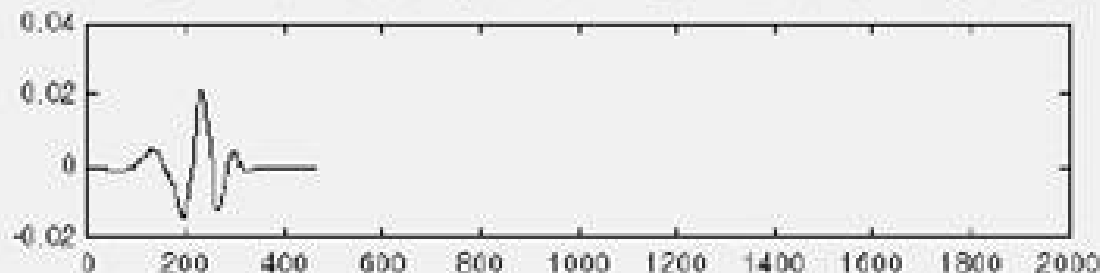
Współczynnik skali działa identycznie dla falek. Im mniejszy współczynnik skali tym bardziej „ściśnięta” falka:



$$f(t) = \psi(t) \quad ; \quad a = 1$$

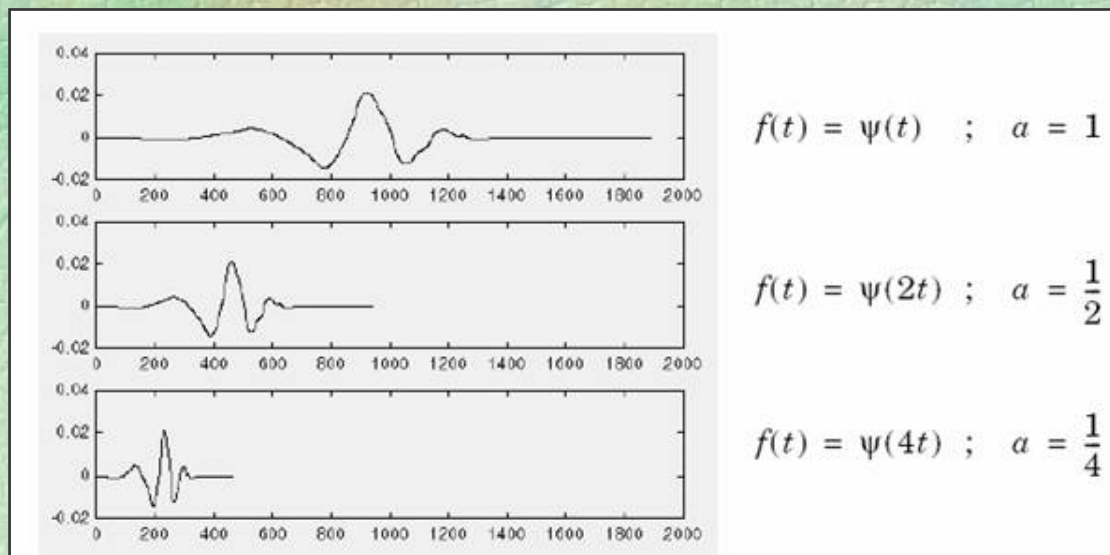
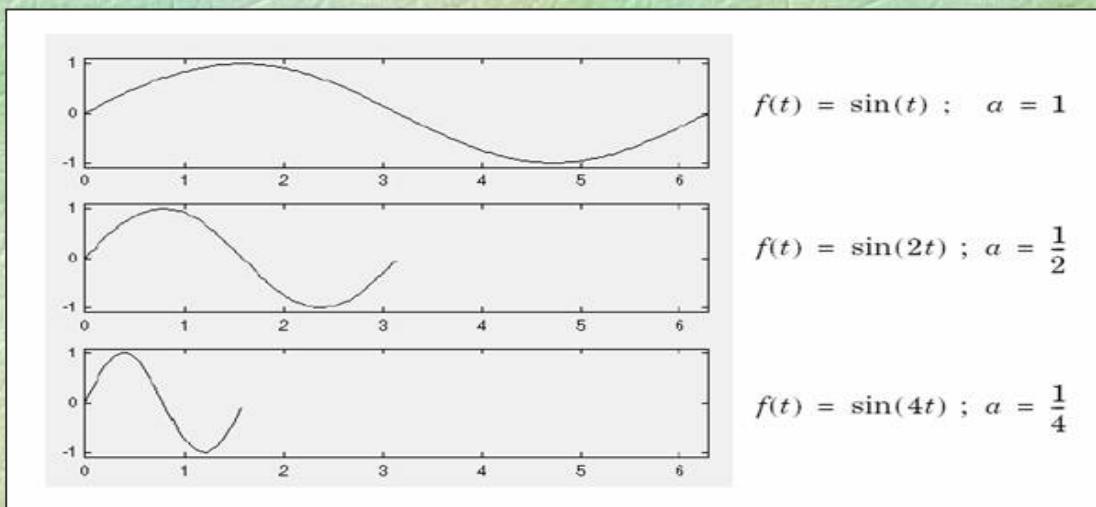


$$f(t) = \psi(2t) \quad ; \quad a = \frac{1}{2}$$



$$f(t) = \psi(4t) \quad ; \quad a = \frac{1}{4}$$

Dla sinusoid współczynnik skali zależy (odwrotnie) od częstotliwości w radianach ω .

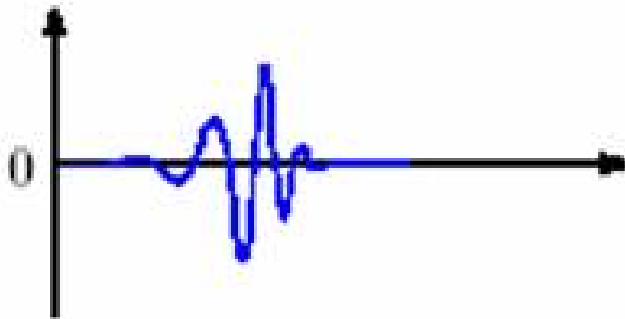


Podobnie jest z analizą falkową, gdzie skala zależy od częstotliwości sygnału.

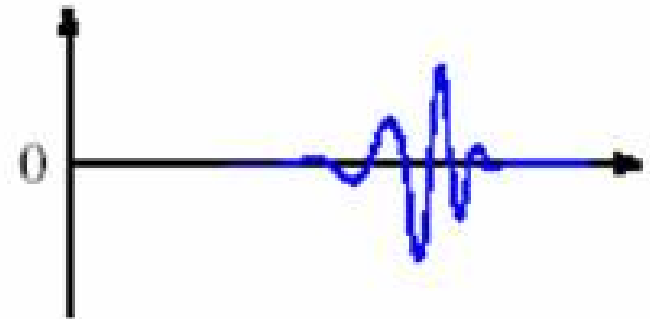
Przesunięcie

Przesunięcie falki oznacza po prostu opóźnienie (lub przyspieszenie) jej początku.

Matematycznie opóźnienie funkcji $f(t)$ o k jest reprezentowane przez $f(t-k)$.



Funkcja falkowa $\psi(t)$



Przesunięta funkcja falkowa $\psi(t-k)$

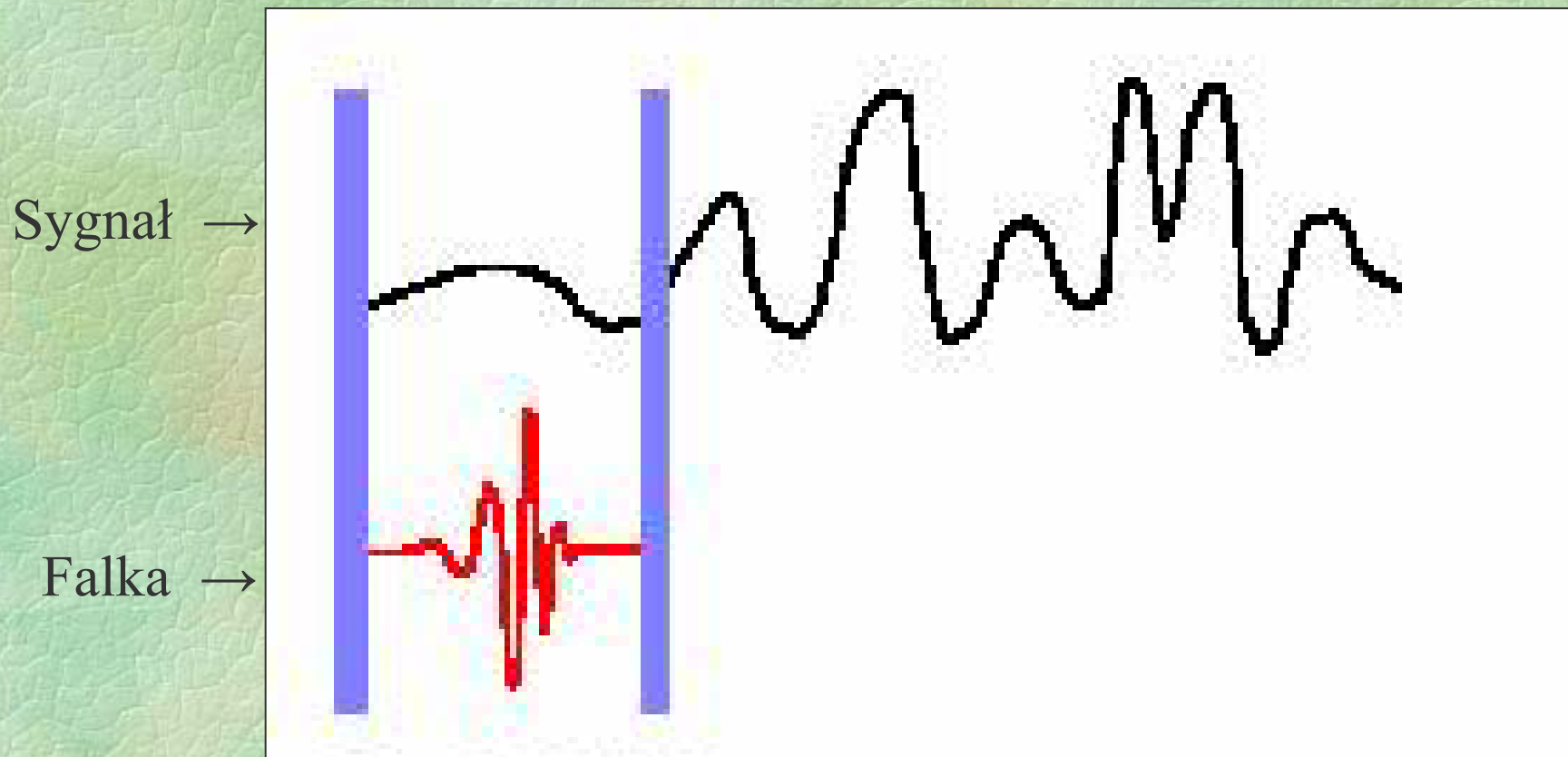
Pięć kroków Ciągłej Transformaty Falkowej

Ciągła transformata falkowa jest sumą po całym czasie sygnału zwielokrotnionego o przeskalowaną, przesuniętą wersję falki.

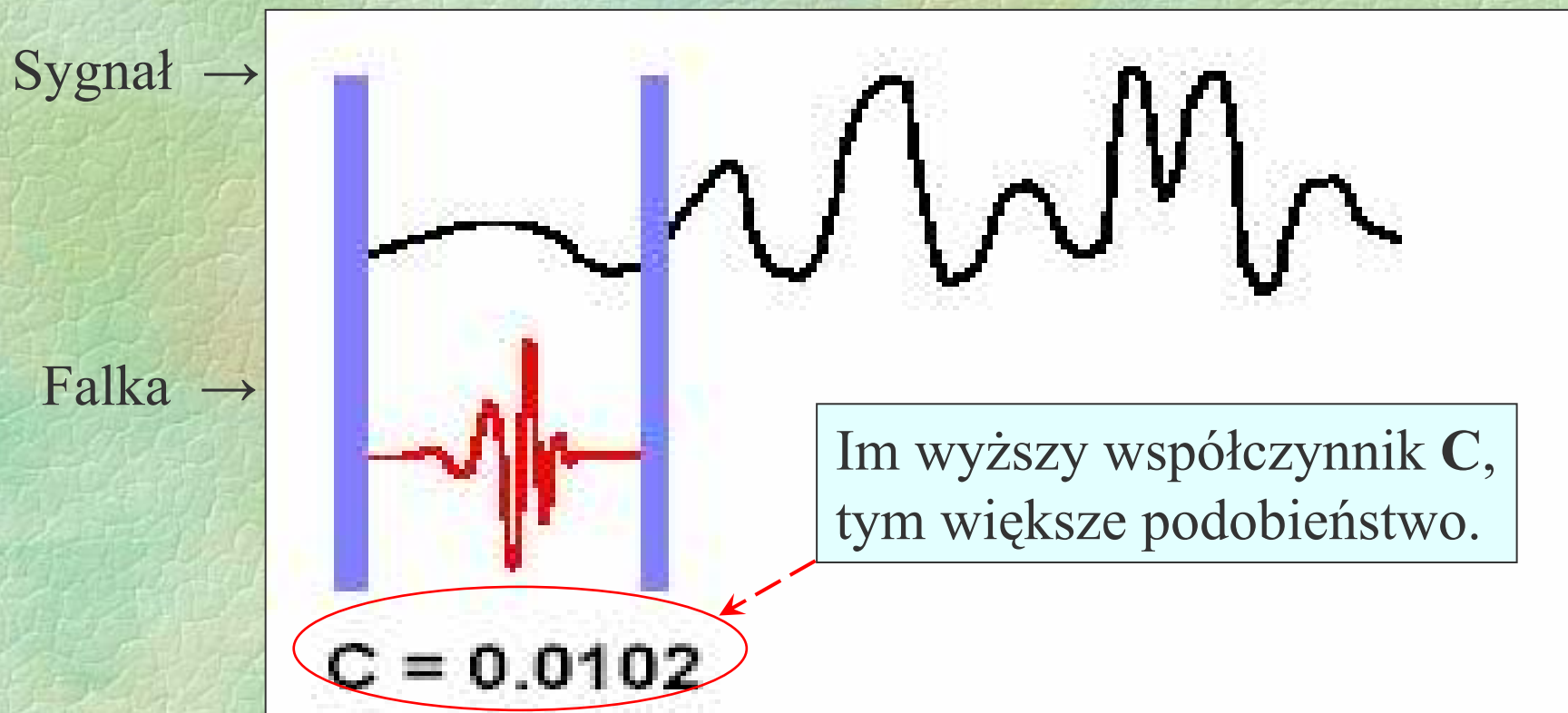
Proces ten daje w wyniku współczynniki falkowe, które są funkcją skali i położenia.

W rzeczywistości jest to bardzo prosty proces, składający się z pięciu kroków prostego algorytmu CWT:

1. Weźmy falkę i porównajmy ją do początkowej części oryginalnego sygnału.



2. Obliczmy liczbę C , która określa jak bardzo falka jest skorelowana z wybranym fragmentem sygnału.

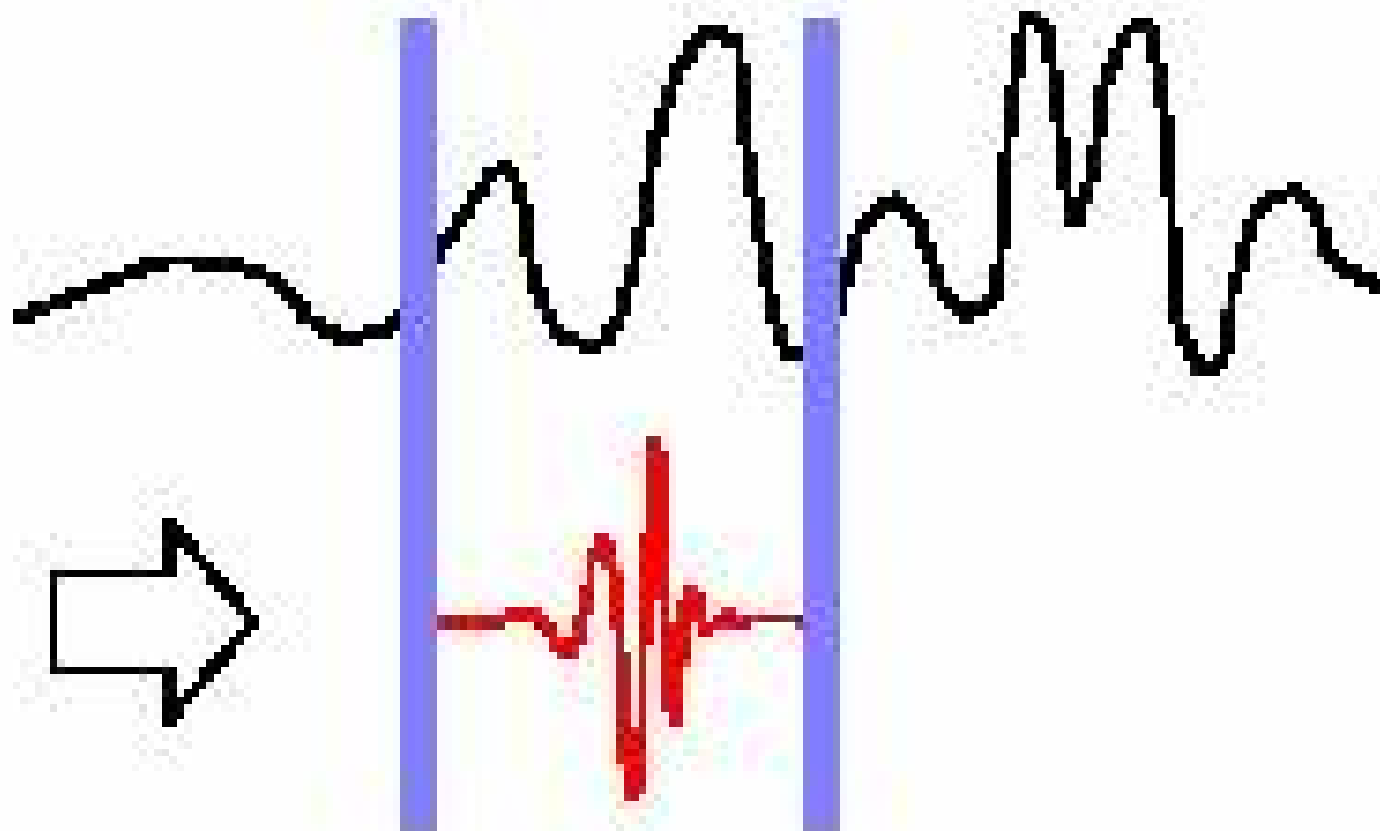


Wynik będzie zależny od kształtu falki jaką wybraliśmy.

3. Przesuńmy falę w prawo i powtórzmy kroki 1 i 2 dopóki nie przejdziemy całego sygnału.

Sygnał →

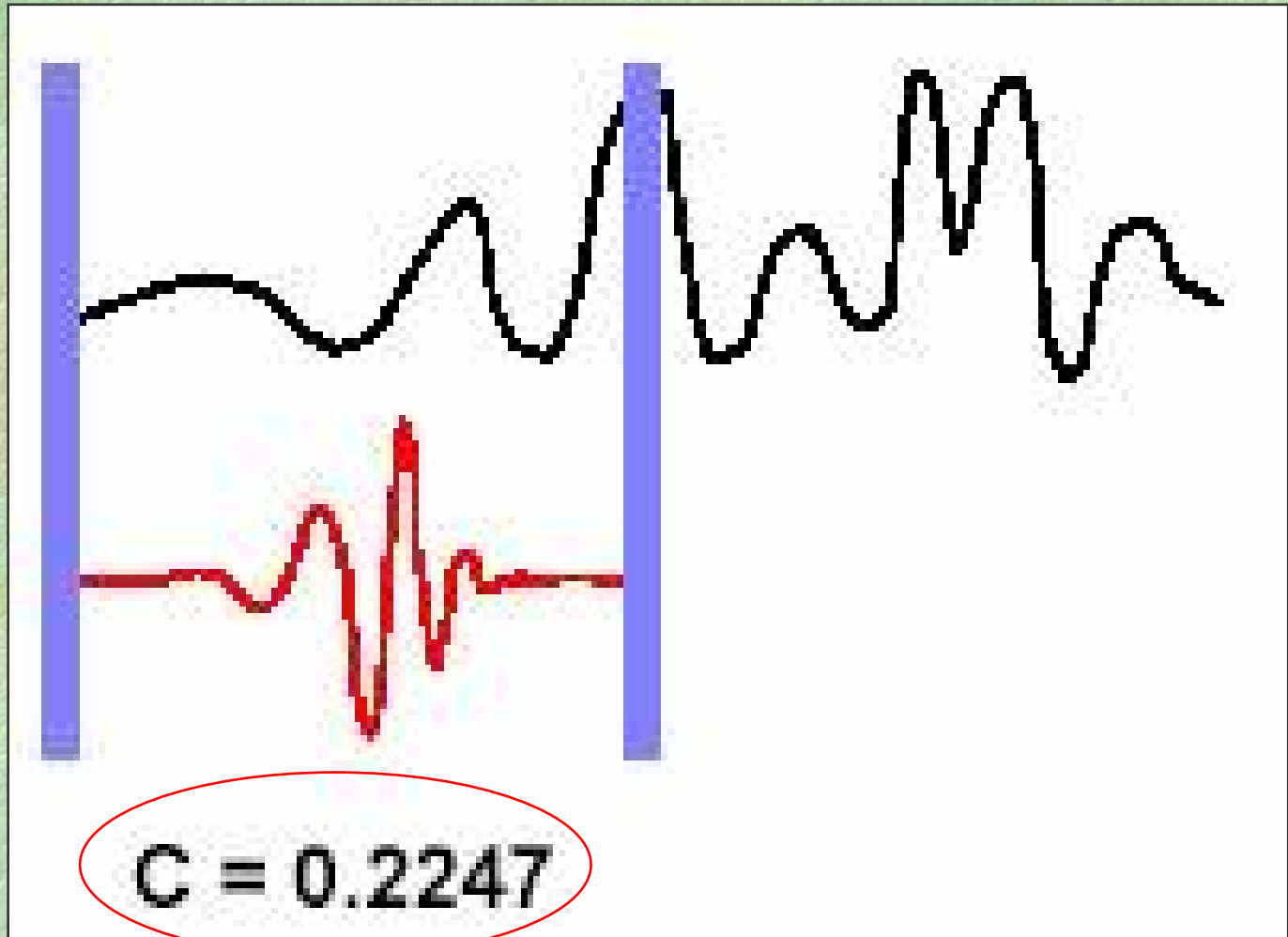
Falka →



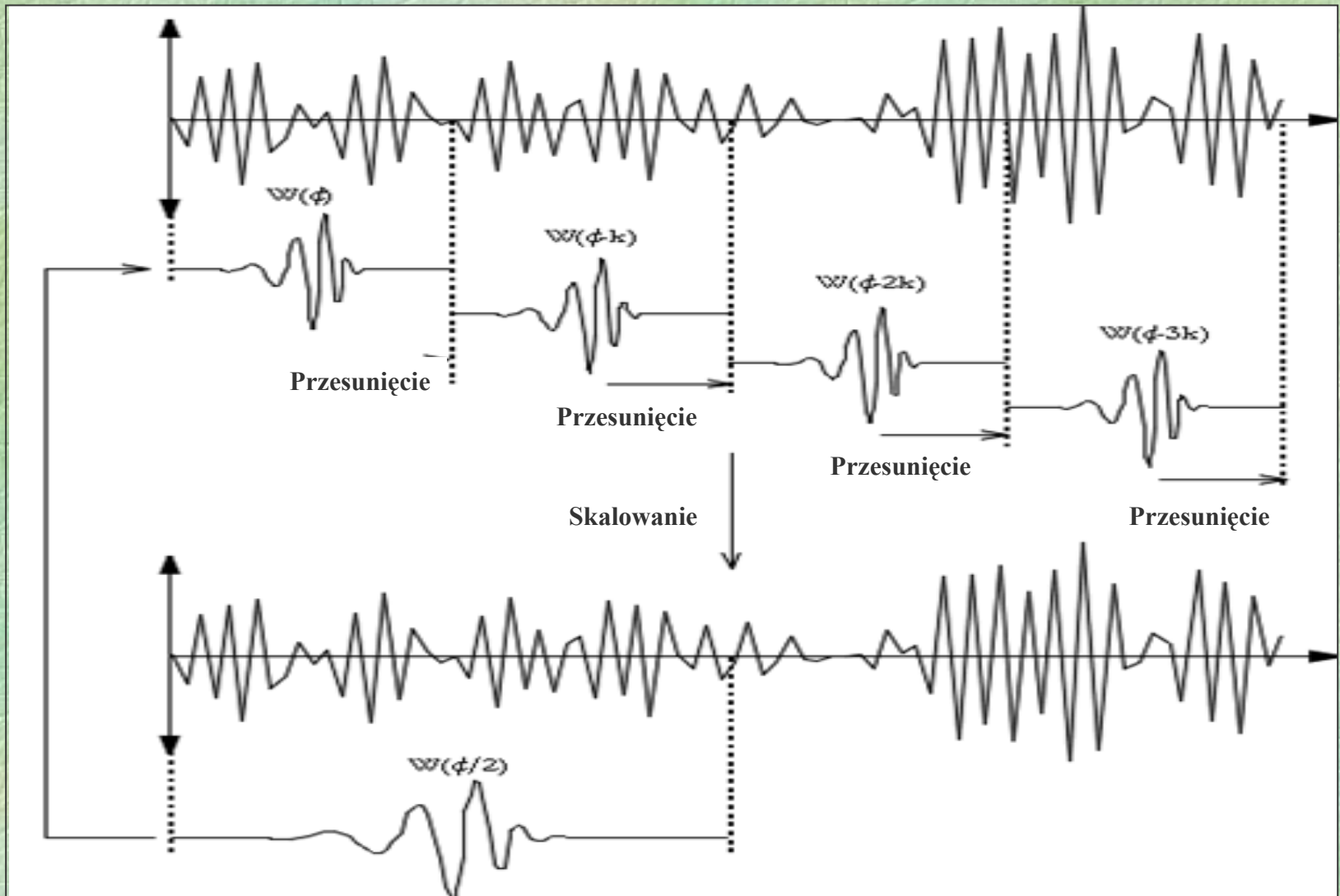
4. Przeskalujemy (rozciągamy) falkę
i powtórzymy kroki od 1 do 3.

Sygnał →

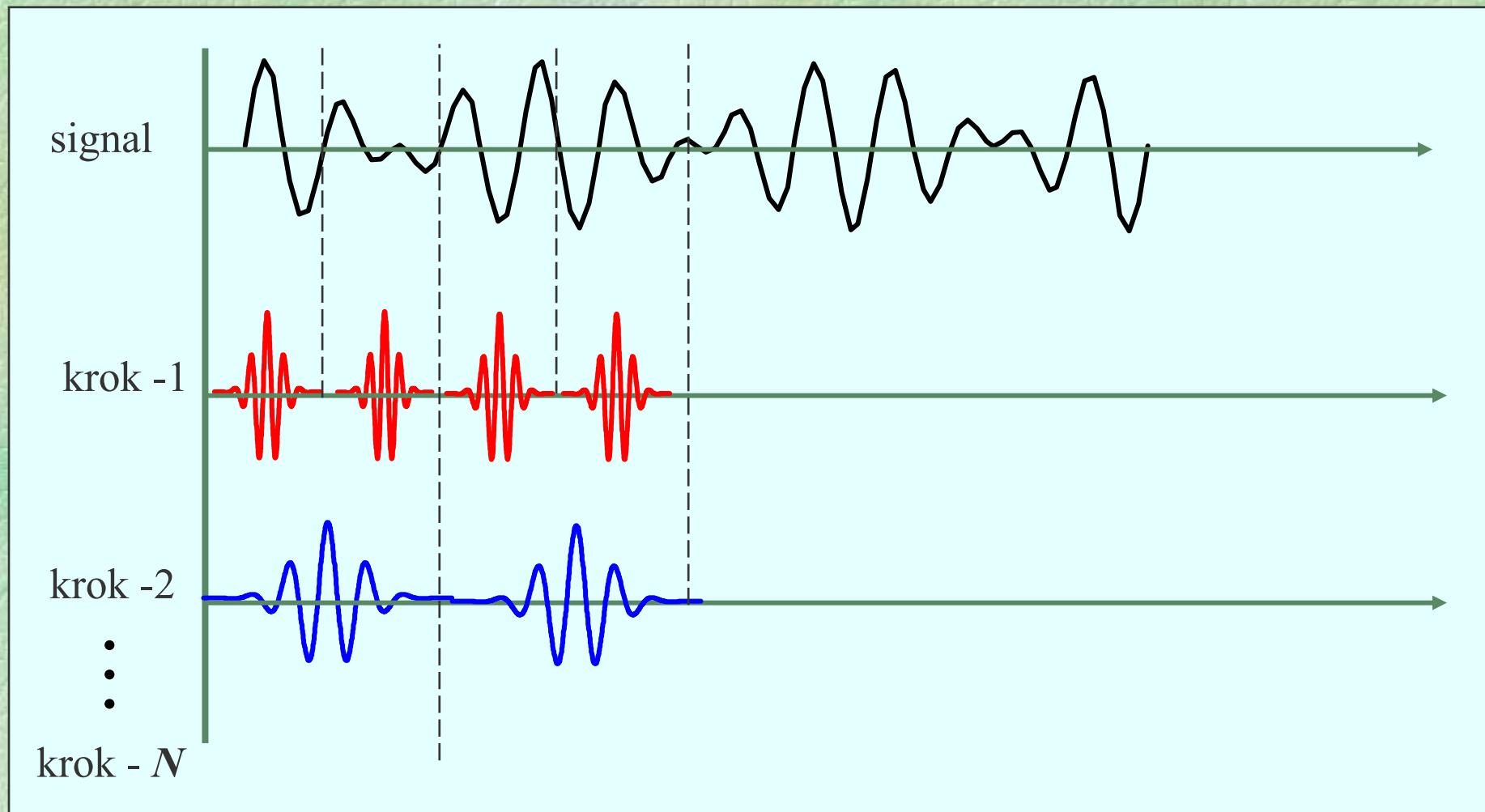
Falka →



5. Powtórzmy kroki 1 do 4 dla wszystkich skal.



Technika wyznaczania Ciągłej Transformaty Falkowej

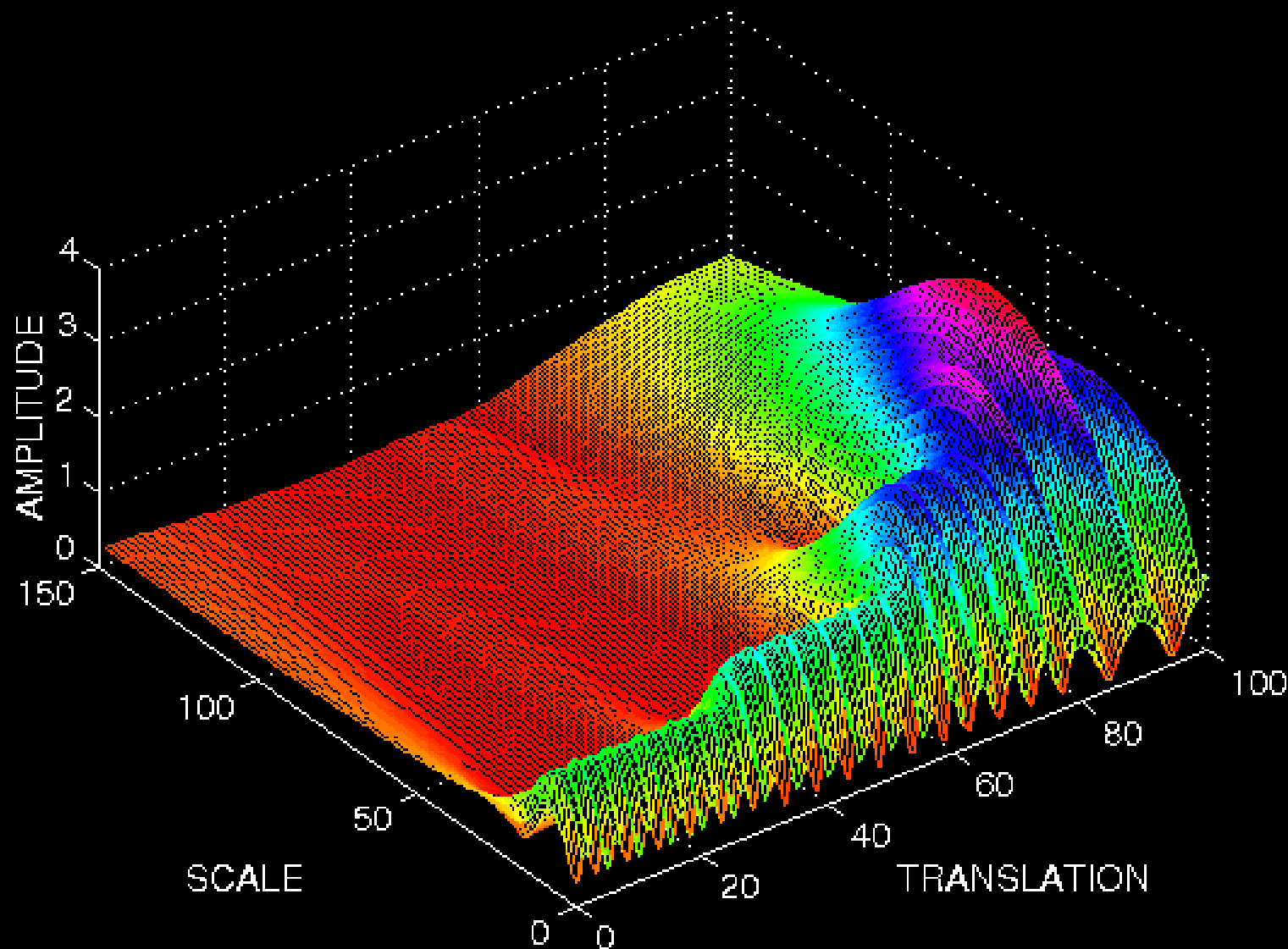


Kiedy skończymy, będziemy mieli współczynniki otrzymane dla różnych skal i różnych części sygnału.

Jak odczytać znaczenie tych wszystkich współczynników?

Musimy zrobić wykres, na którym oś x reprezentuje położenie sygnału (czas), a oś y reprezentuje skalę, kolor każdego punktu $(x-y)$ reprezentuje wielkość falkowego współczynnika C .

Wykres CWT



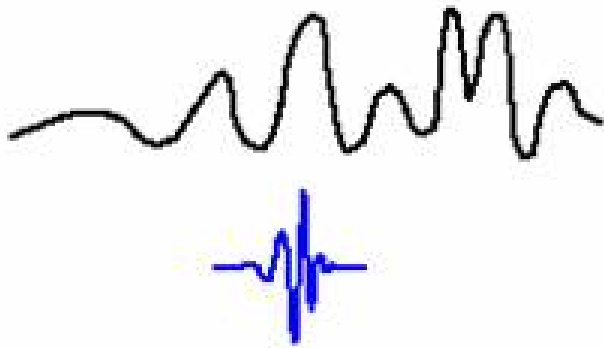
THE WAVELET TUTORIAL

All Rights Reserved, Robi Polikar, Ames, Iowa, 1996

Skala a częstotliwość

Przypomnijmy, że wyższa skala odpowiada bardziej „rozciągniętym” falkom.

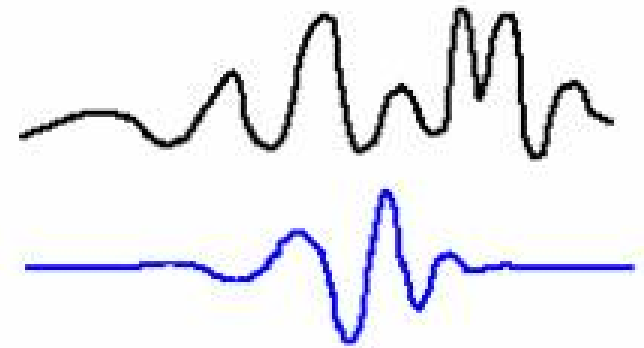
Im bardziej rozciągnięta falka tym dłuższa część sygnału z którym falka będzie porównywana.



Niska skala

Sygnał

Falka



Wysoka skala

Zatem istnieje związek między skalą falki a częstotliwością:

- Niska skala $a \rightarrow$ ściśnięta falka $\rightarrow$ szybciej zmieniające się współczynniki szczegółowości $\rightarrow$ wysoka częstotliwość ω .

- Wysoka skala $a \rightarrow$ rozciągnięta falka $\rightarrow$ wolno zmieniające się cechy sygnału $\rightarrow$ niska częstotliwość ω .

Dyskretna transformata falkowa

Obliczanie współczynników falkowych dla każdej możliwej skali wymaga dostatecznie dużo pracy i wytwarza strasznie dużo danych.

Co się stanie jeśli wybierzemy tylko podzbiór skal i położeń dla których wykonamy nasze obliczenia?

To rozwiązanie będzie godne uwagi kiedy wybierzemy skale i położenia oparte na potęgach dwójki – tak zwane podwojone (*dyadic*) skale i położenia – wtedy nasza analiza będzie bardziej efektywna i dostatecznie dokładna.

W ten sposób uzyskano dyskretną transformatę falkową (*discrete wavelet transform* – DWT).

Skuteczny sposób implementacji tego schematu z użyciem filtrów został wynaleziony w **1988** roku przez **Stephane Mallata**.

Algorytm Mallata faktycznie jest klasycznym schematem znanym w środowisku zajmującym się przetwarzaniem sygnałów jako **dwukanałowy koder podpasmowy** (*two-channel subband coder*).

Ten bardzo praktyczny algorytm filtrujący daje **szybką transformatę falkową** (*fast wavelet transform*) – narzędzie przez które przechodzą sygnały i które wylicza współczynniki falkowe.

Jednoetapowe filtrowanie. Aproksymacje i współczynniki szczegółowości.

Dla wielu sygnałów część nisko-
częstotliwościowa jest najważniejszą częścią.
To ona stanowi o tożsamości sygnału.



Z drugiej strony część wysoko-
częstotliwościowa, przekazuje szczegółowe cechy
sygnału.

Rozważmy dla przykładu głos ludzki.

Jeśli usuniemy z niego elementy wysokoczęstotliwościowe, głos brzmi inaczej, ale nadal możemy stwierdzić co zostało powiedziane.

Jednakże, jeśli usuniemy wystarczająco dużo elementów o niskich częstotliwościach usłyszymy bełkot.

W analizie falkowej, zwykle mówimy o *aproksymacjach* (approximations) i *współczynnikach szczegółowości* (details).

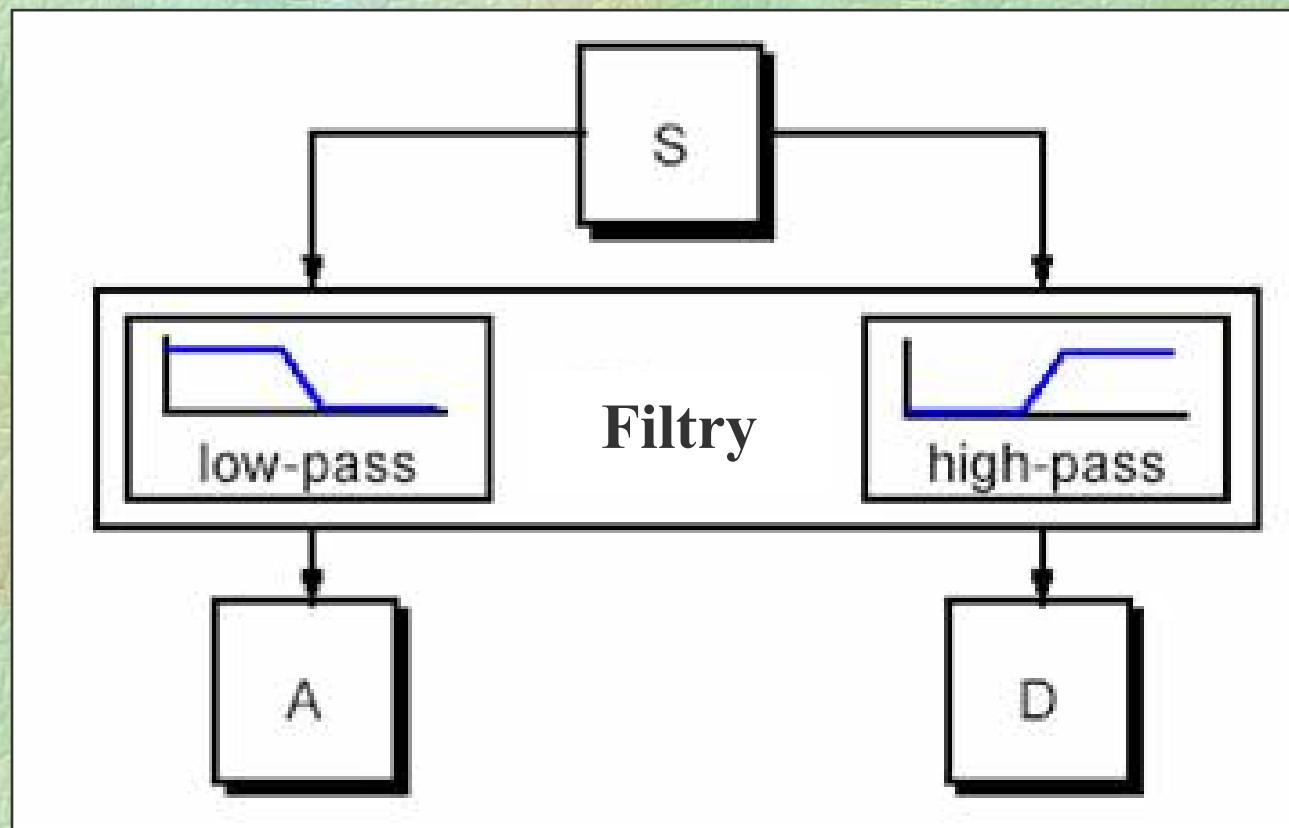
Aproksymacje są elementami sygnału o wysokiej skali i niskiej częstotliwości.



Detale są elementami o niskiej skali i wysokiej częstotliwości.

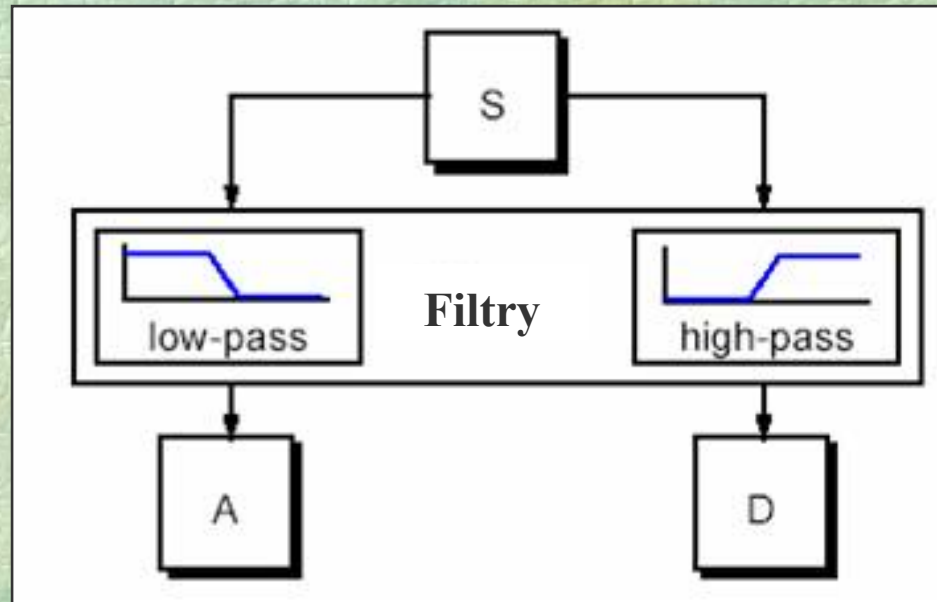


Proces filtrowania w najprostszym przypadku wygląda następująco:



Oryginalny sygnał S , przechodzi przez dwa odpowiadające sobie filtry i wychodzi z nich jako sygnał podzielony na dwa sygnały.

Niestety, jeśli wykonujemy tę operację na sygnale cyfrowym otrzymamy dwa razy tyle danych niż z iloma zaczynaliśmy.

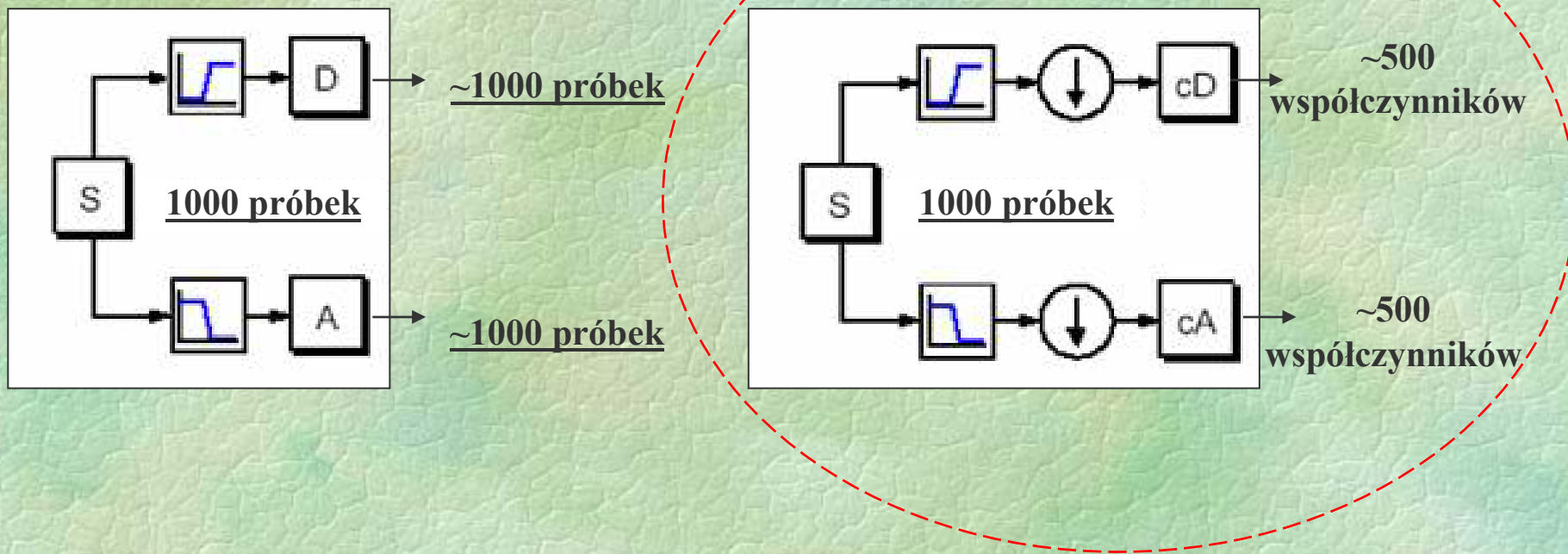


Przypuśćmy, dla przykładu, że oryginalny sygnał S zawiera 1000 próbek. Wtedy każdy z sygnałów wynikowych będzie zawierał po 1000 próbek, co łącznie daje 2000.

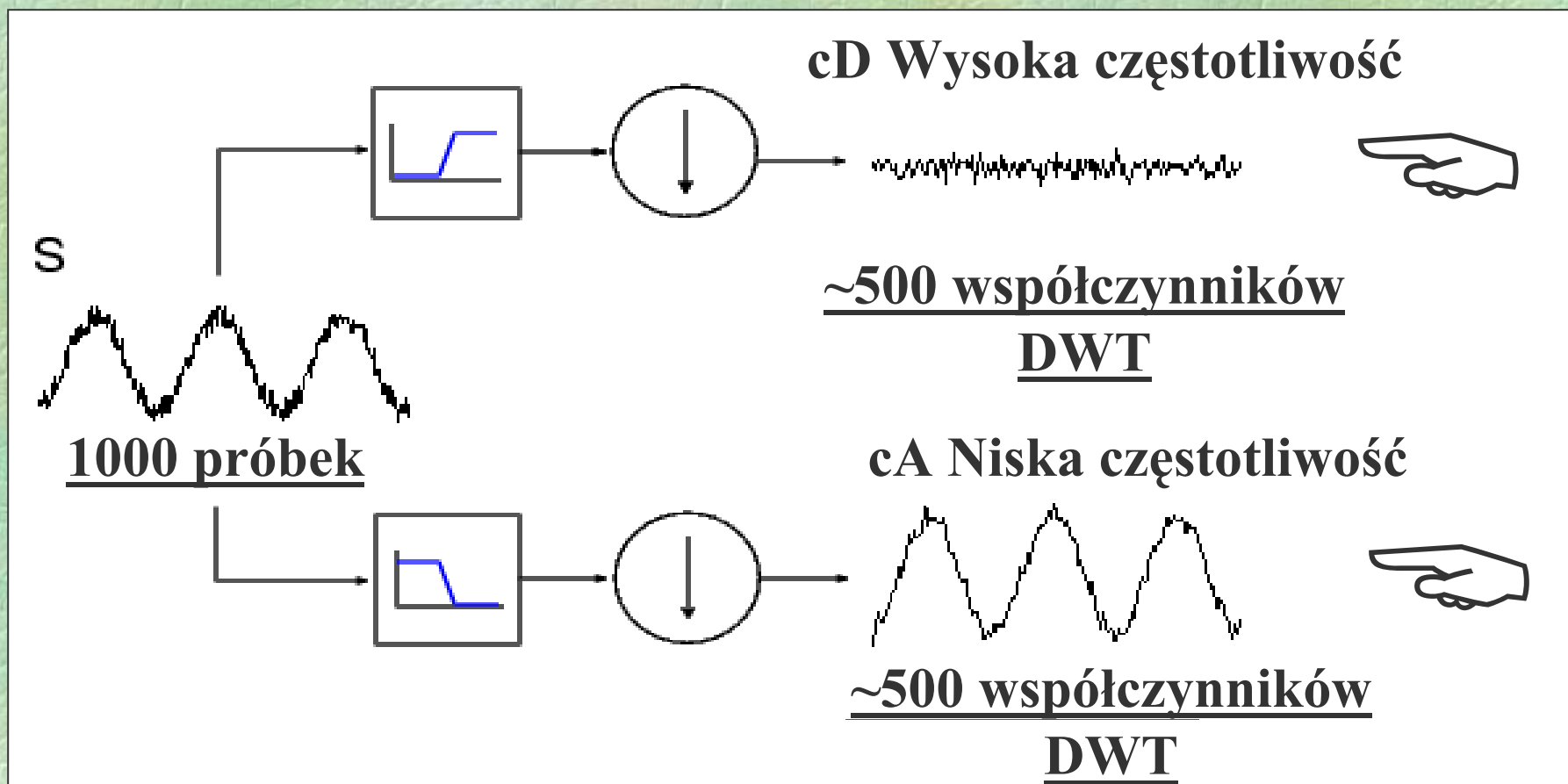
Istnieje bardziej subtelny sposób dokonania dekompozycji z wykorzystaniem falek → możemy zatrzymać tylko jeden z dwóch punktów w każdej z 2000 próbek, aby otrzymać kompletną informację.

Nazywane jest to *downsamplingiem*.
Otrzymamy dwa ciągi oznaczone jako **cA** i **cD**.

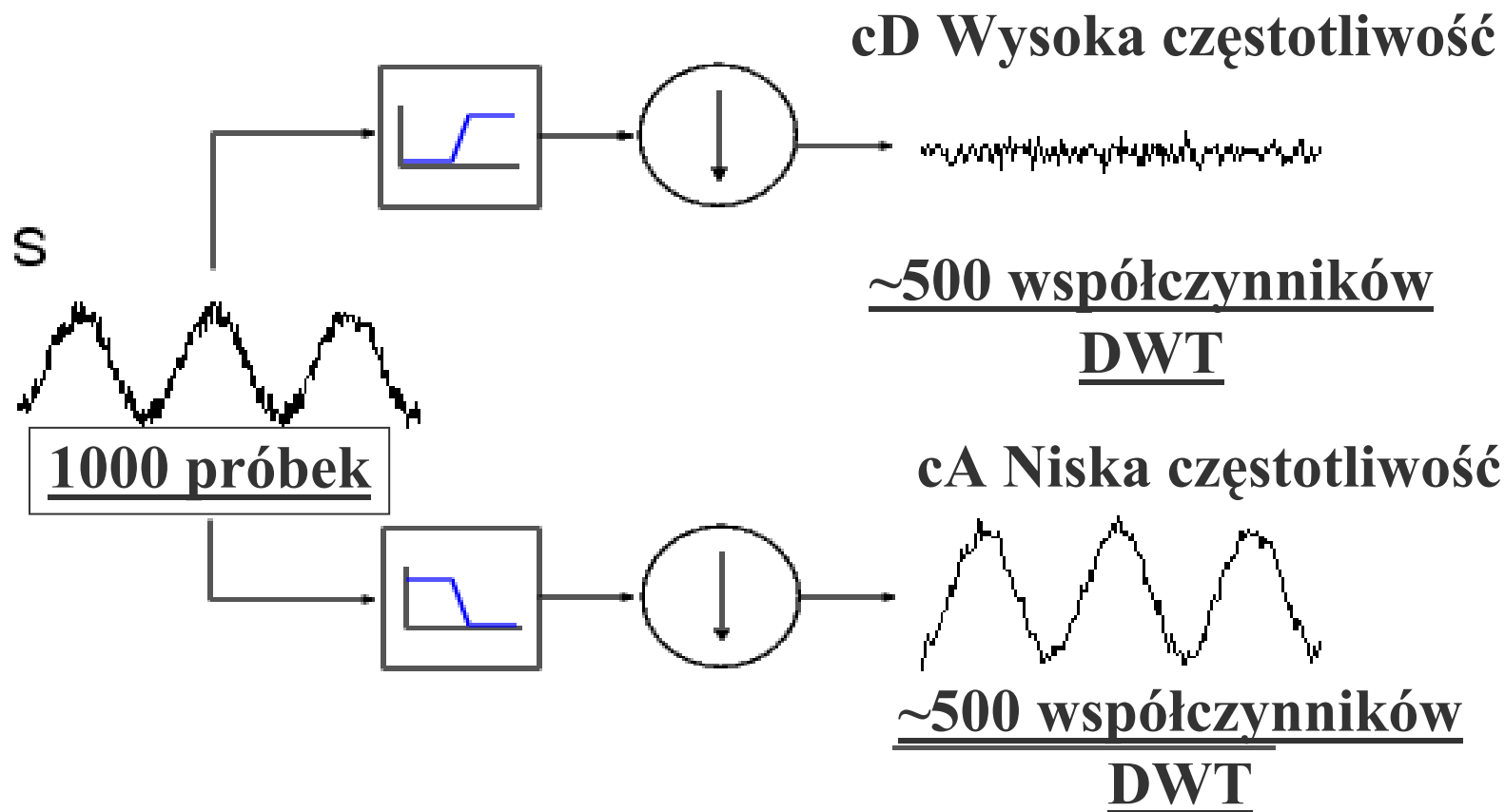
W wyniku procesu po prawej stronie, zawierającego downsampling, otrzymujemy współczynniki DWT.



Dla przykładowego sygnału sinusoidalnego, analiza falkowa będzie wyglądać następująco:



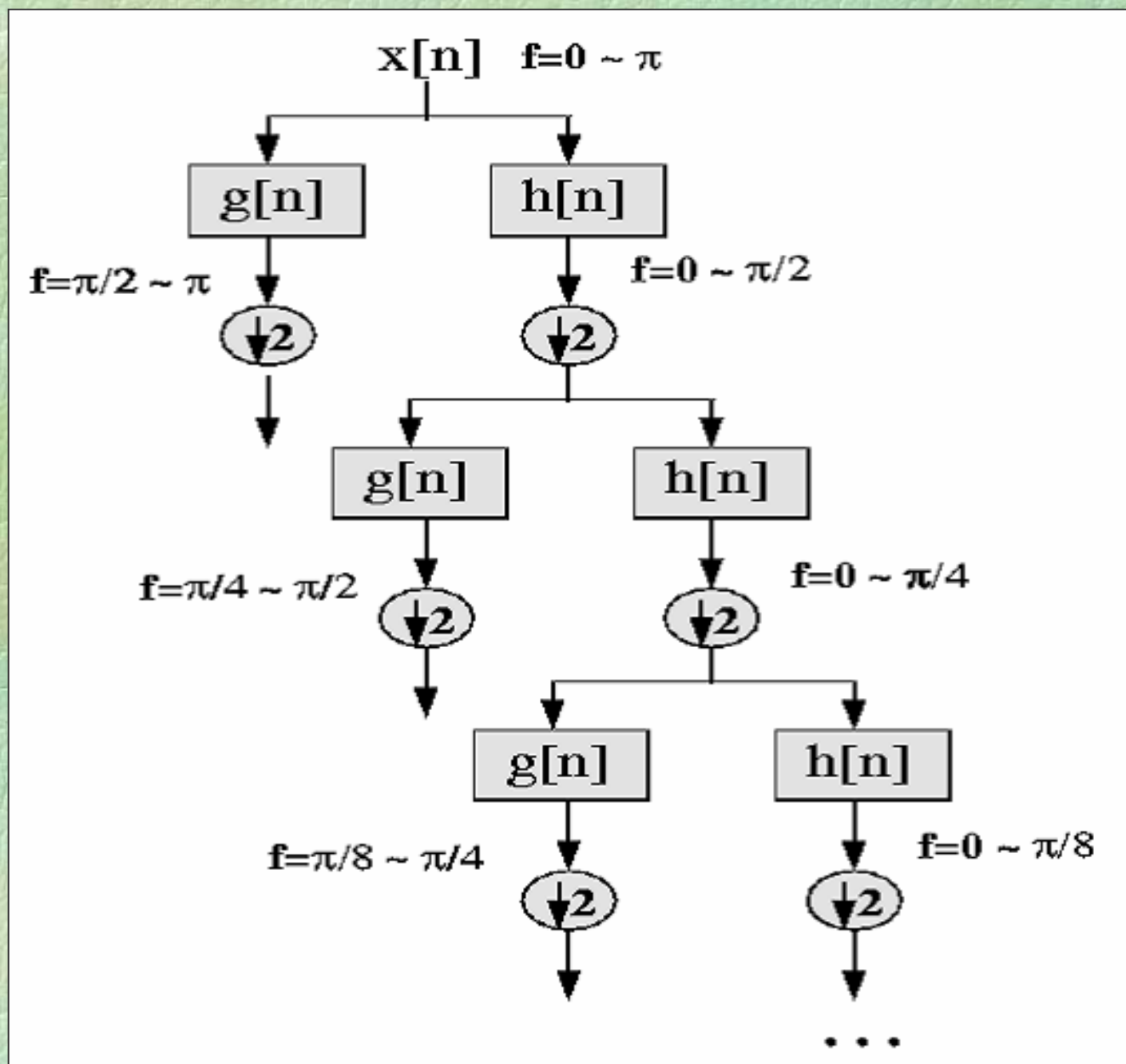
Można zauważyć, że współczynniki szczegółowości cD są małe i zawierają głównie wysoko-częstotliwościowy szum, podczas gdy współczynniki aproksymacji cA zawierają znacznie mniej szumu niż oryginalny sygnał.



Dekompozycja wielopoziomowa

Proces dekompozycji może być powtarzany, o kolejne rozkłady współczynników aproksymacji, tak więc jeden sygnał może być rozbity na wiele mniejszych elementów.

Proces ten można przedstawić za pomocą drzewa dekompozycji falkowej (*wavelet decomposition tree*).

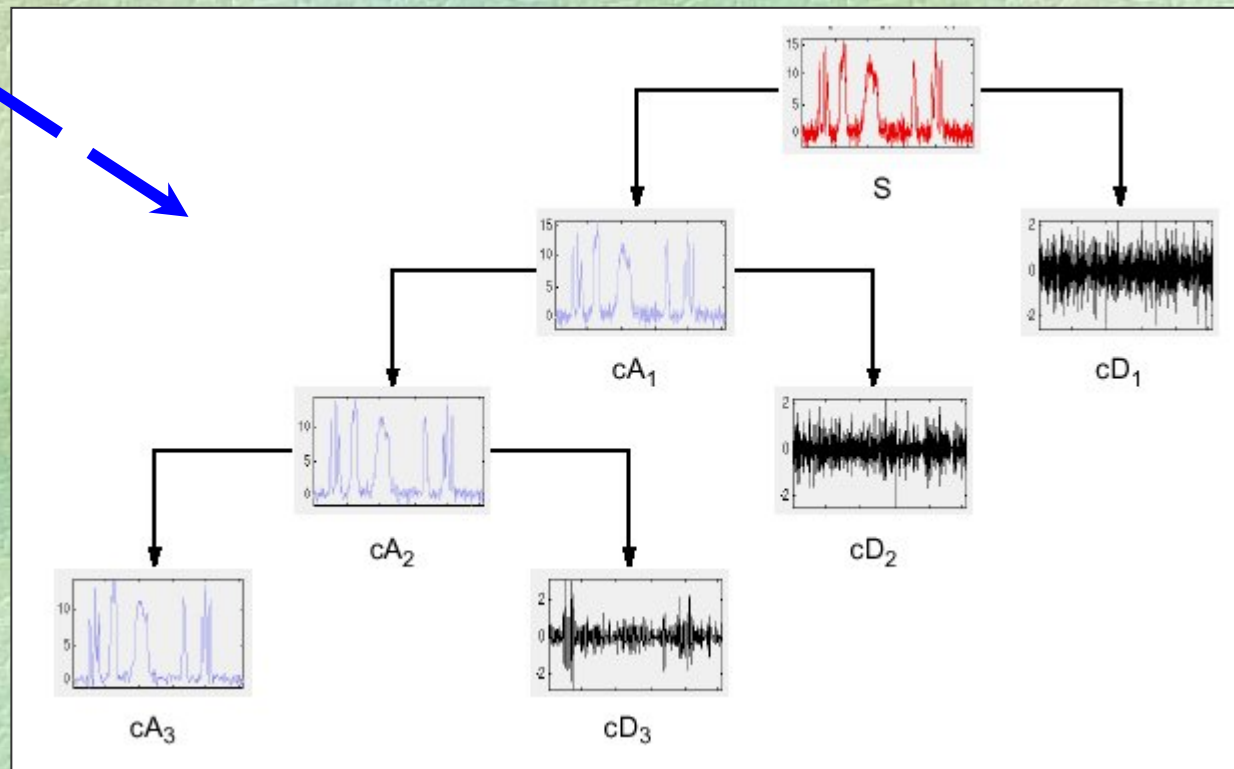
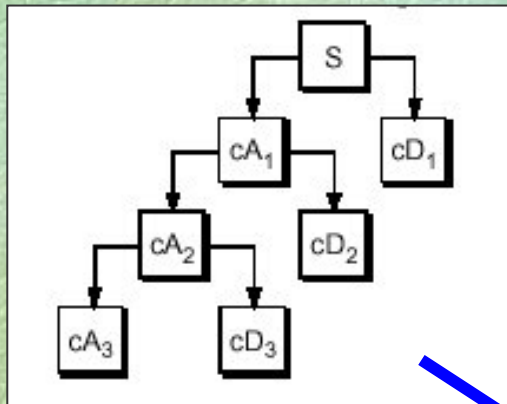


Skoro proces analizy jest iteracyjny, teoretycznie może być kontynuowany nieskończenie długo.

W rzeczywistości dekompozycja może być kontynuowana tylko do osiągnięcia pojedynczej próbki lub jednego piksela.

W praktyce, wybiera się odpowiednią liczbę poziomów opartą na naturze sygnału, lub odpowiednich kryteriach takich jak *entropia*.

Dekompozycja wielopoziomowa



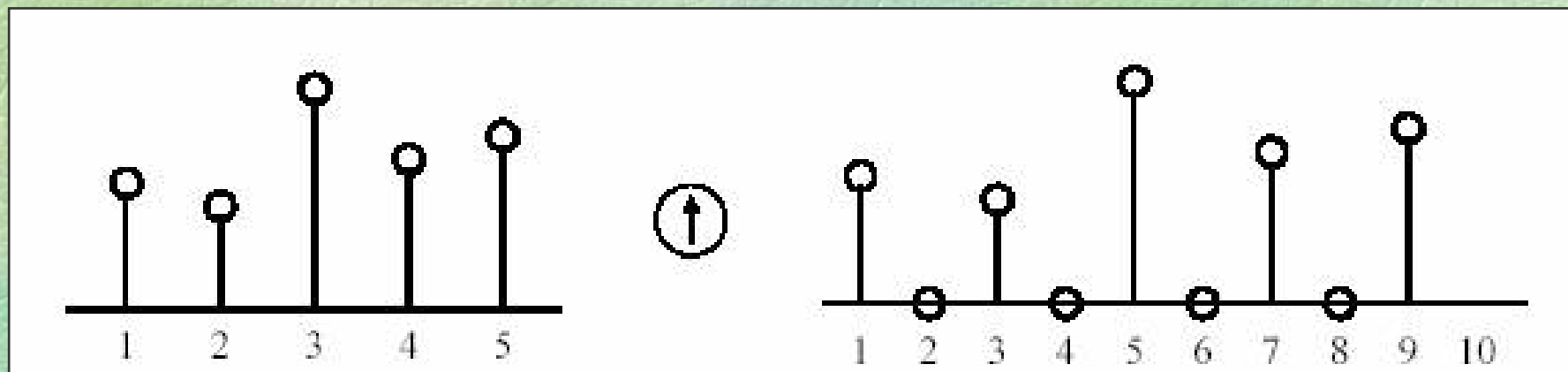
Rekonstrukcja falkowa

Proces odzyskiwania oryginalnego sygnału bez straty informacji nazywany jest **synteza** lub **rekonstrukcją**.

Przekształcenie matematyczne które w wyniku daje syntezę jest zwana **odwrotną transformatą falkową** (*inverse discrete wavelet transform* IDWT).

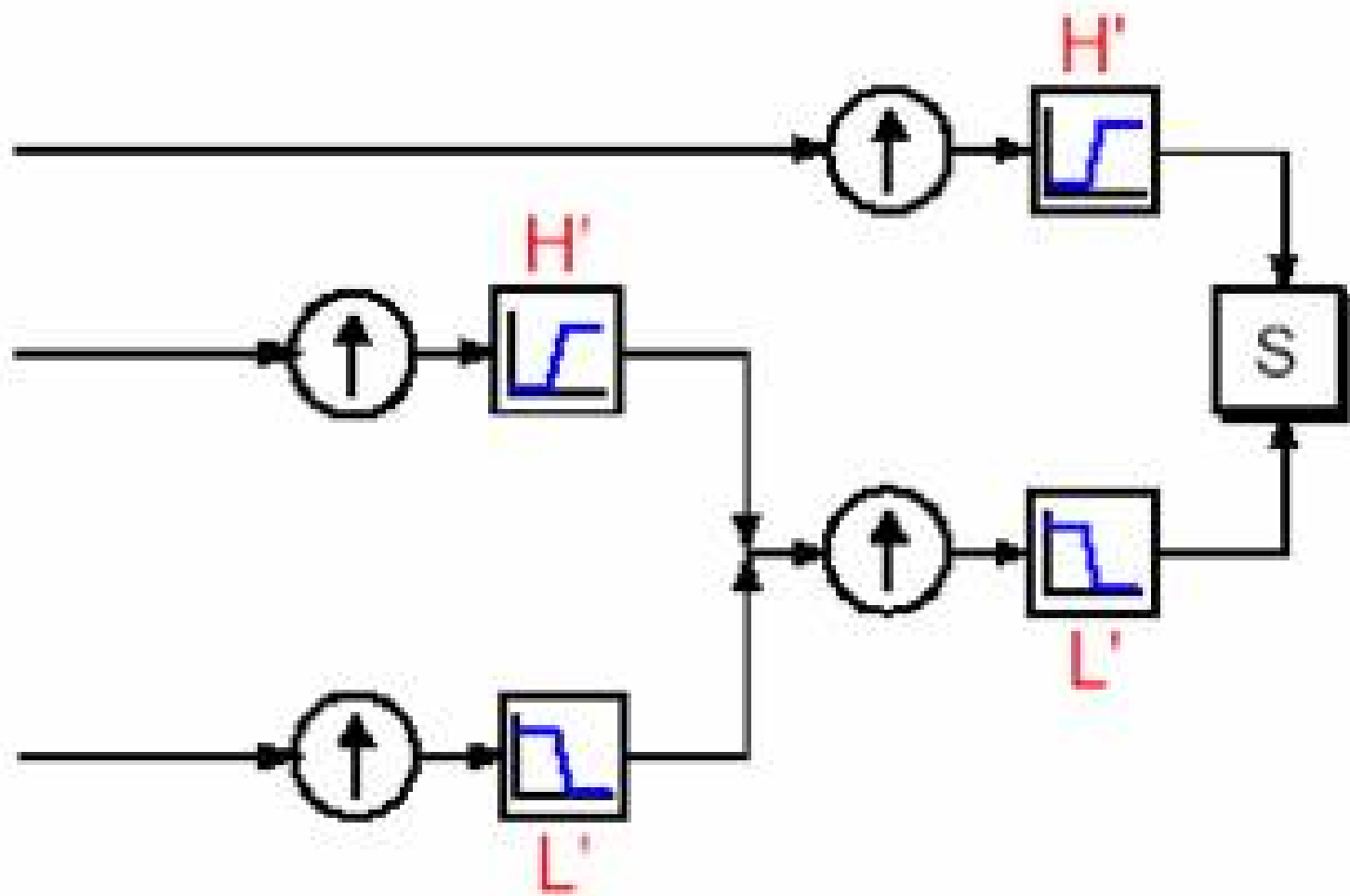
Podczas gdy analiza falkowa obejmowała filtrowanie i downsampling, proces rekonstrukcji falkowej zawiera filtrowanie i **upsampling**.

Upsampling jest procesem zwiększania ilości elementów sygnału poprzez wstawianie zer pomiędzy próbki:



Elementy sygnału

**Elementy sygnału po procesie
upsamplingu**



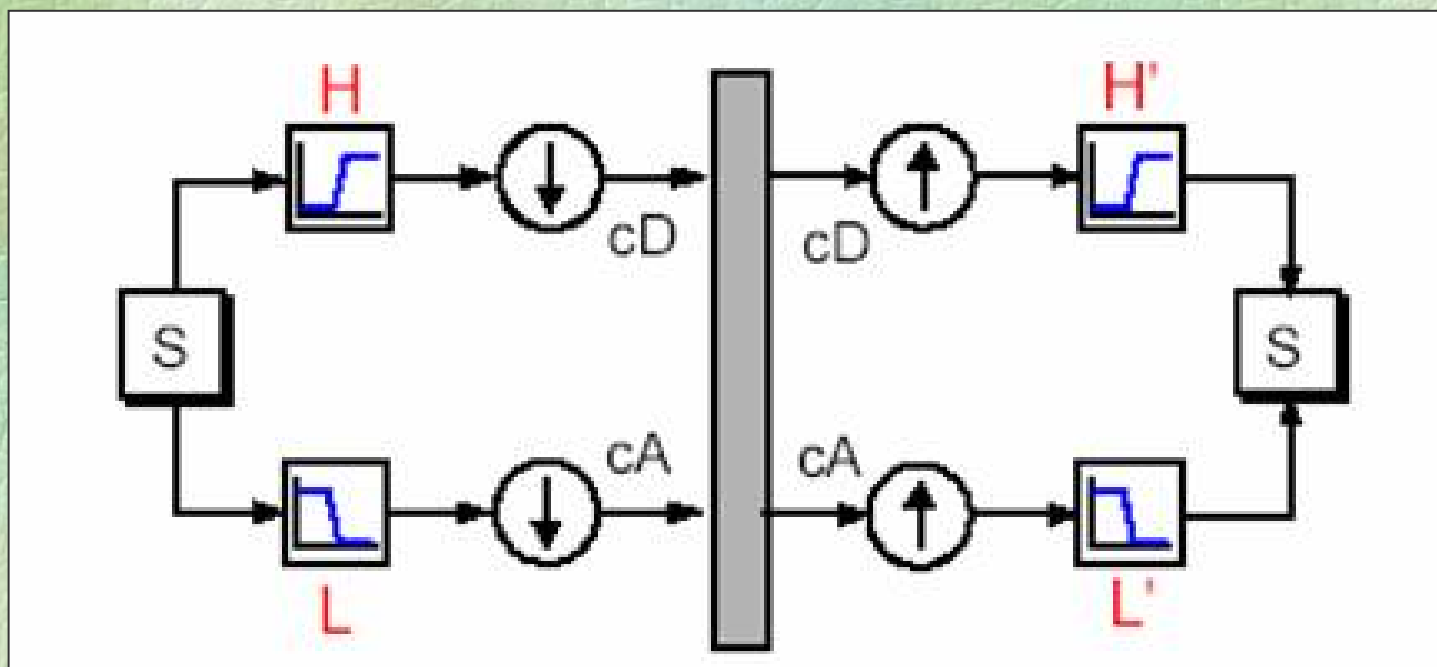
Filtry do rekonstrukcji sygnału

Część procesu rekonstrukcji oparta na filtrowaniu rodzi pewną dyskusję, ponieważ dla osiągnięcia dobrej rekonstrukcji oryginalnego sygnału decydujący jest wybór odpowiedniego filtra.

Downsampling elementów sygnału dokonany podczas fazy dekompozycji wprowadza zniekształcenia zwane aliasingiem.

Ostrożny dobór filtrów dla faz dekompozycji i rekonstrukcji, które są blisko związane ze sobą (ale nie identyczne), pozwala na wyeliminowanie efektu aliasingu.

Nisko - i wysokoczęstotliwościowe filtry dekompozycyjne (L i H), razem ze związanymi z nimi filtrami do rekonstrukcji (L' i H'), tworzą system zwany **kwadraturowymi filtrami lustrzanymi** (*quadrature mirror filters*).

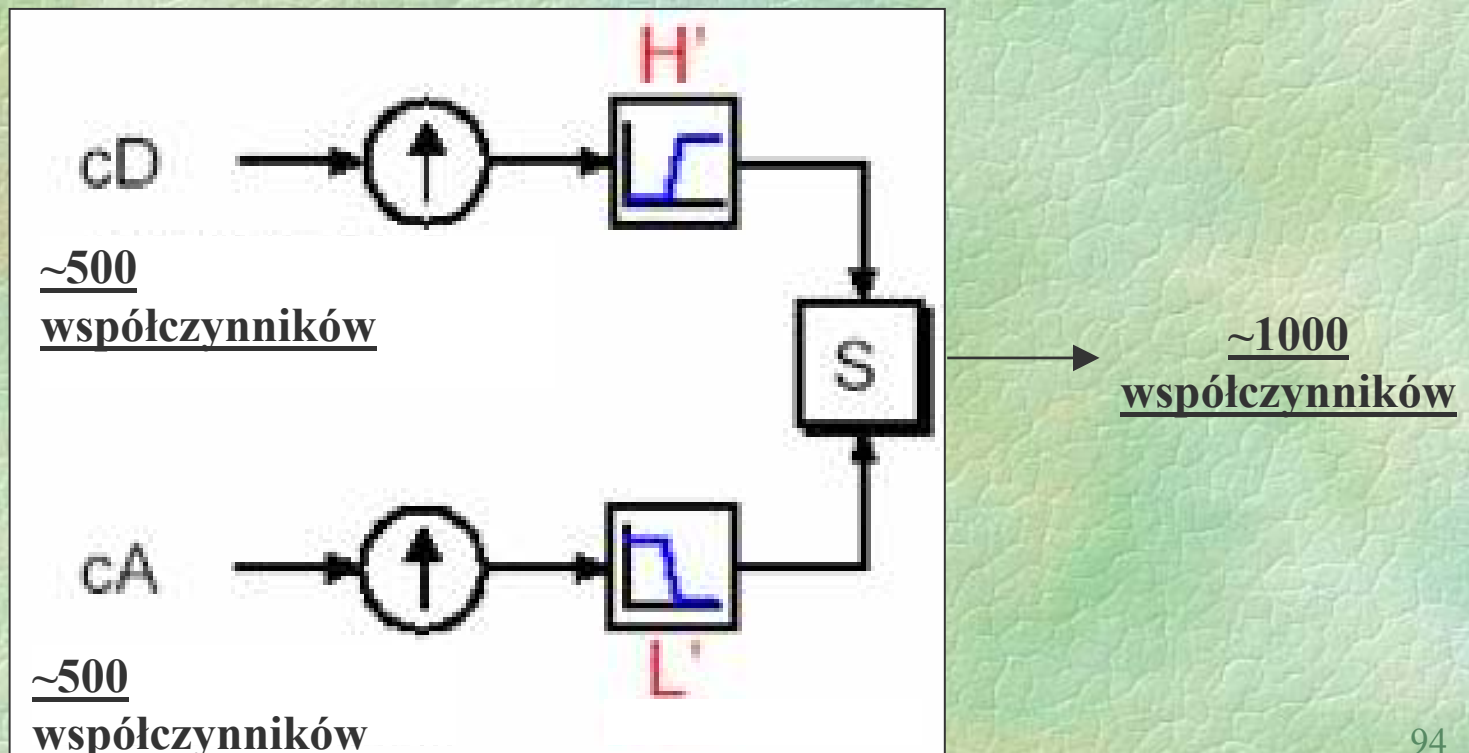


Dekompozycja

Rekonstrukcja

Rekonstrukcja aproksymacji i detali

Możliwa jest rekonstrukcja naszego oryginalnego sygnału ze współczynników aproksymacji i szczegółowości.

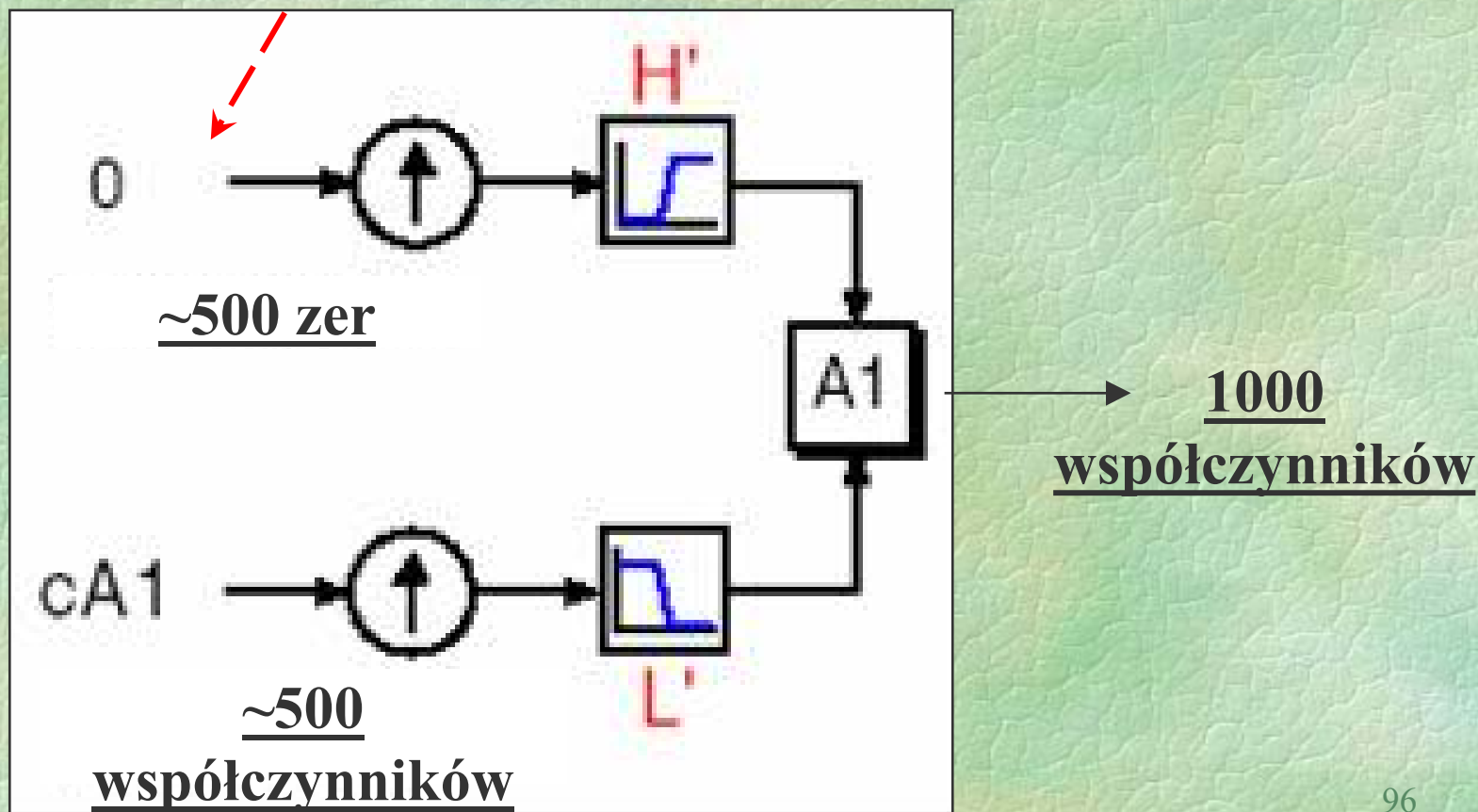


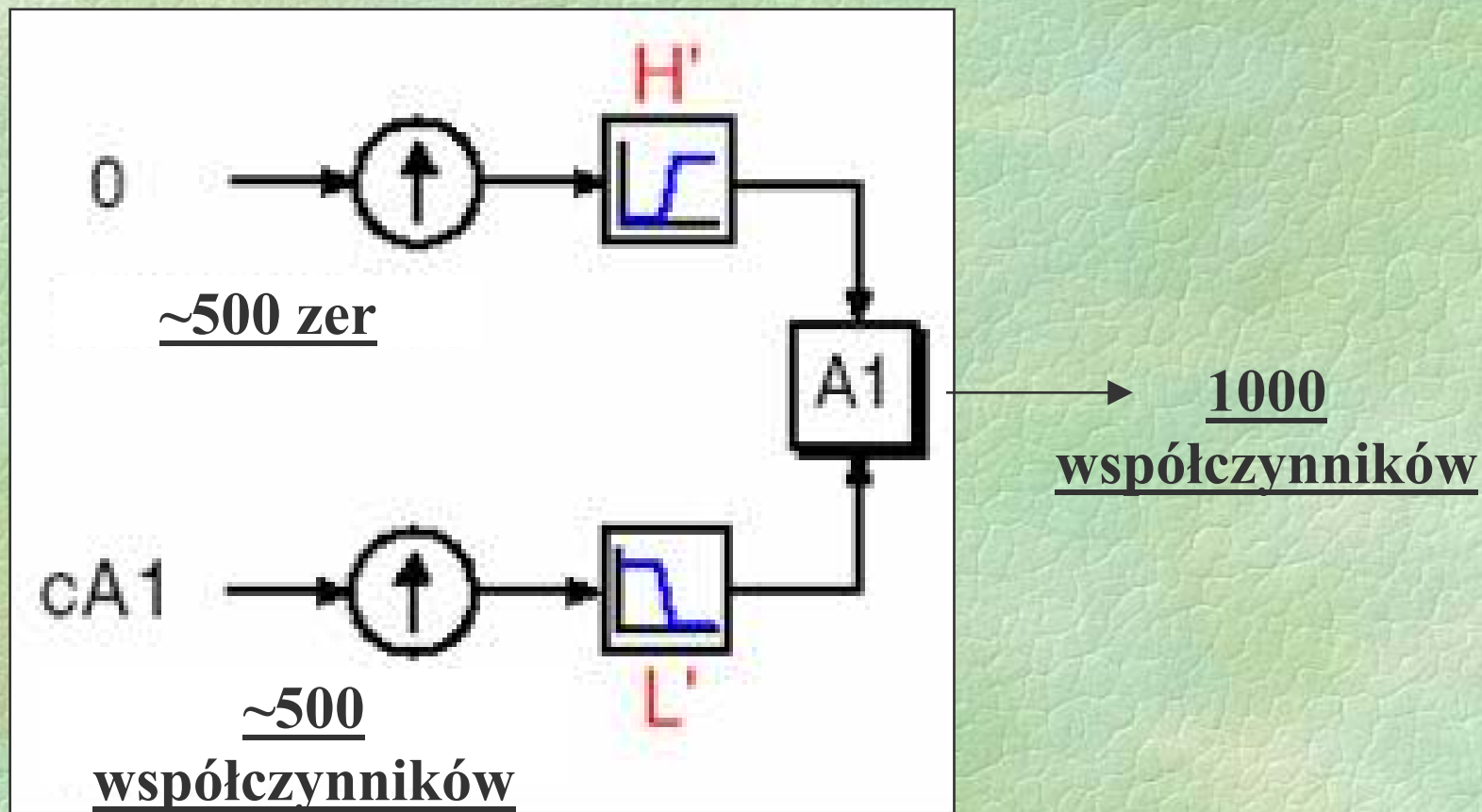
Możliwa jest także rekonstrukcja aproksymacji i współczynników szczegółowości z wektorów współczynników.

Na przykład, zastanówmy się jak moglibyśmy odzyskać aproksymacje pierwszego poziomu $\mathbf{A}_1$ z wektora współczynników $\mathbf{cA}_1$.

Przepuszczamy wektor współczynników $\mathbf{cA}_1$ przez ten sam proces jaki stosowaliśmy do rekonstrukcji oryginalnego sygnału.

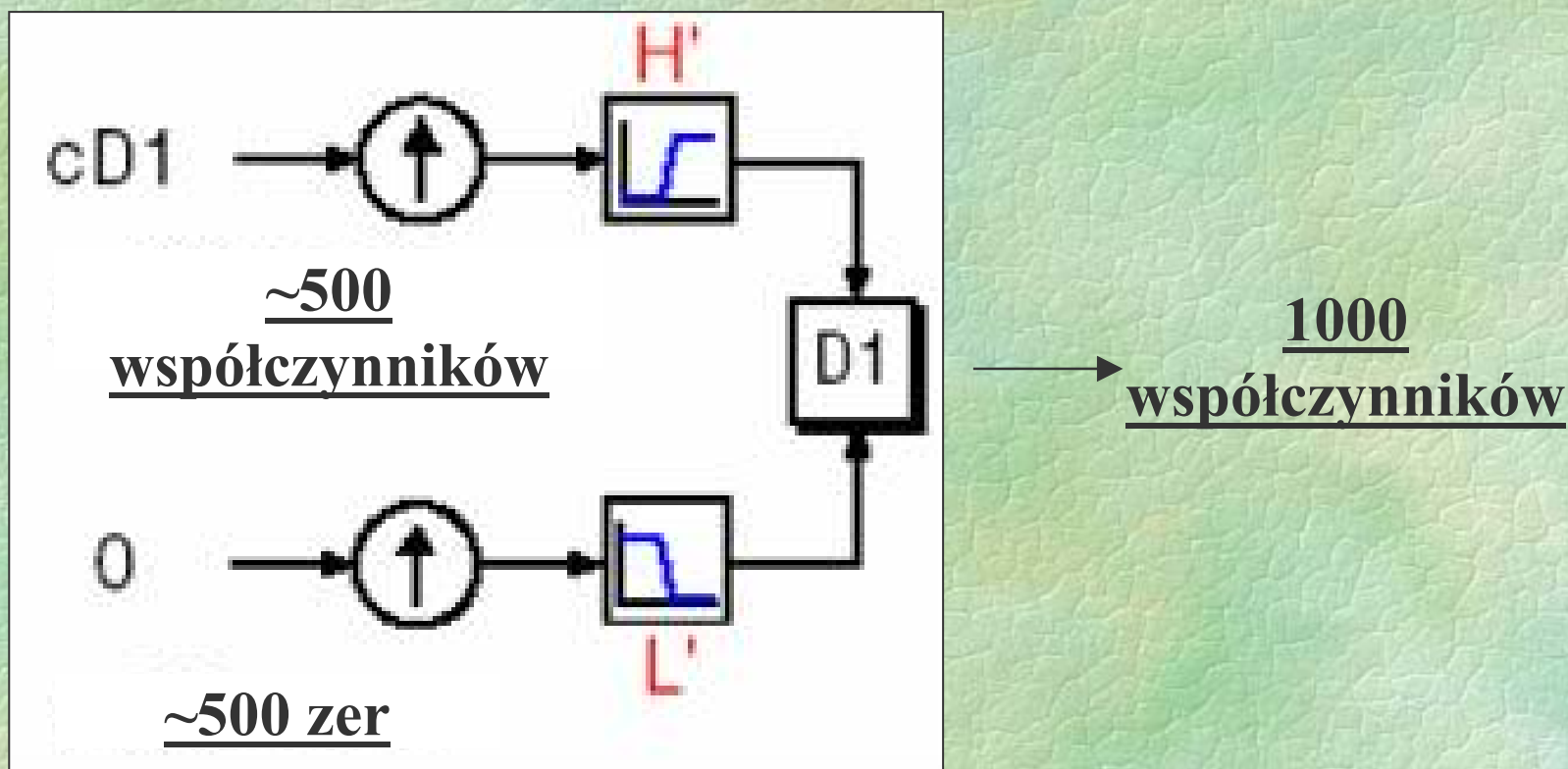
Jednak w miejsce współczynników szczegółowości **cD1**, wstawimy wektor złożony z samych zer:





W wyniku procesu odzyskaliśmy aproksymację $A1$, która ma tę samą długość co oryginalny sygnał S i która jest jego prawdziwą aproksymacją.

Podobnie możemy odzyskać współczynnik szczegółowości pierwszego poziomu **D1**, stosując analogiczny proces:



Odzyskane współczynniki szczegółowości i aproksymacje są prawdziwymi składowymi oryginalnego sygnału.

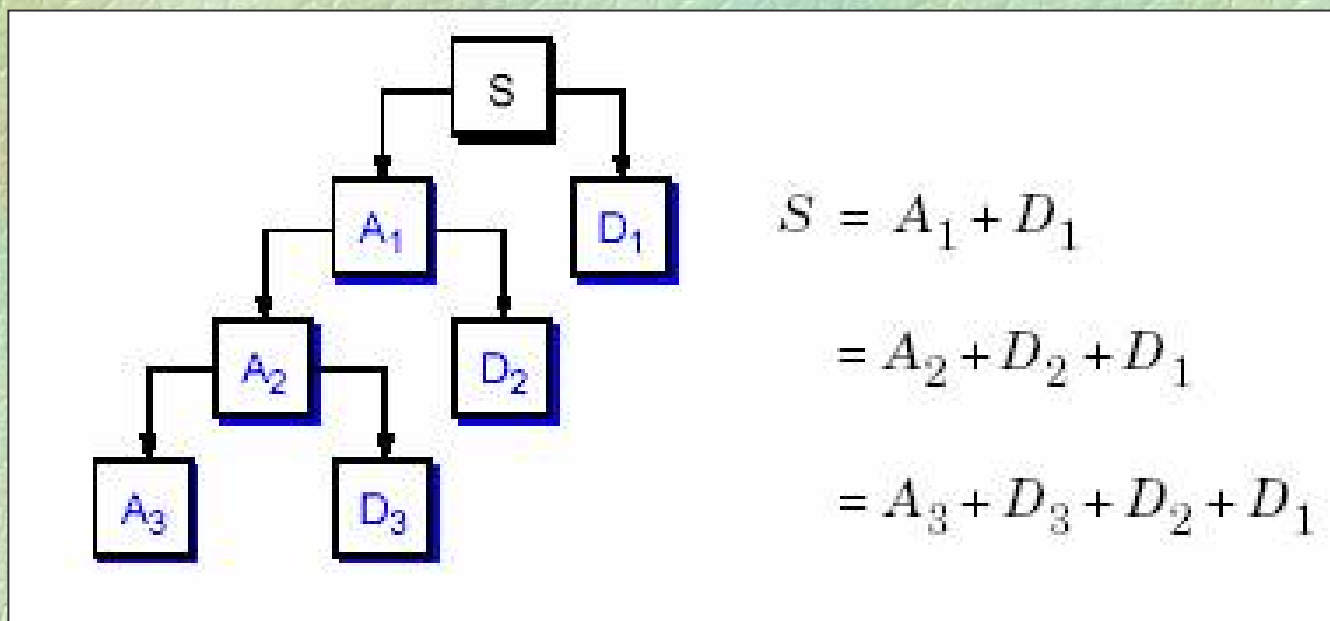
W rzeczywistości sygnał odzyskamy łącząc te współczynniki w następujący sposób:

$$\mathbf{A1} + \mathbf{D1} = \mathbf{S}$$

Należy zauważyć, że wektory współczynników **cA1** i **cD1** – ponieważ zostały utworzone przez downsampling i mają tylko połowę długości oryginalnego sygnału – nie mogą być bezpośrednio połączone w celu odzyskania sygnału.

Zanim je połączymy musimy odzyskać współczynnik aproksymacji i szczegółowości

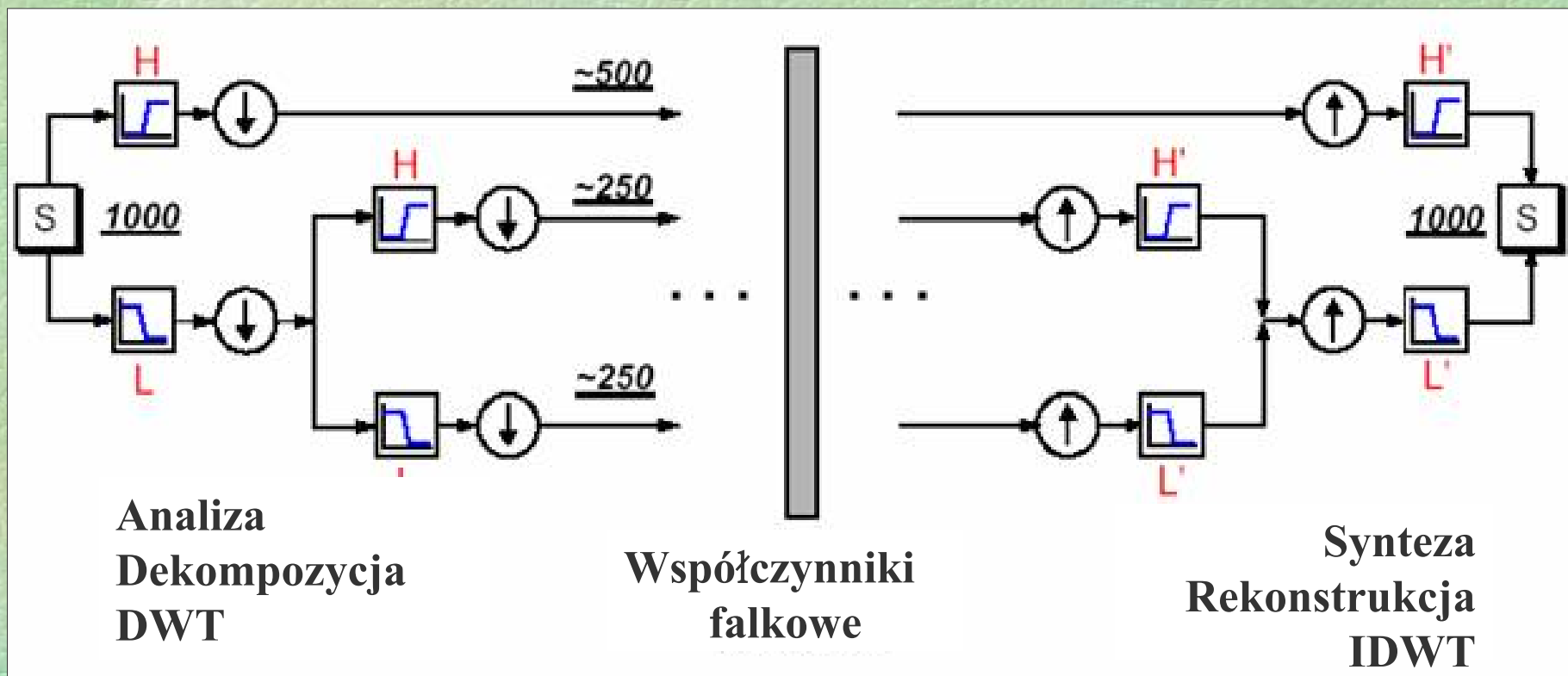
Rozszerzając tą technikę na elementy analizy wielopoziomowej, znajdziemy podobne zależności zachowane dla składowych zrekonstruowanego sygnału.



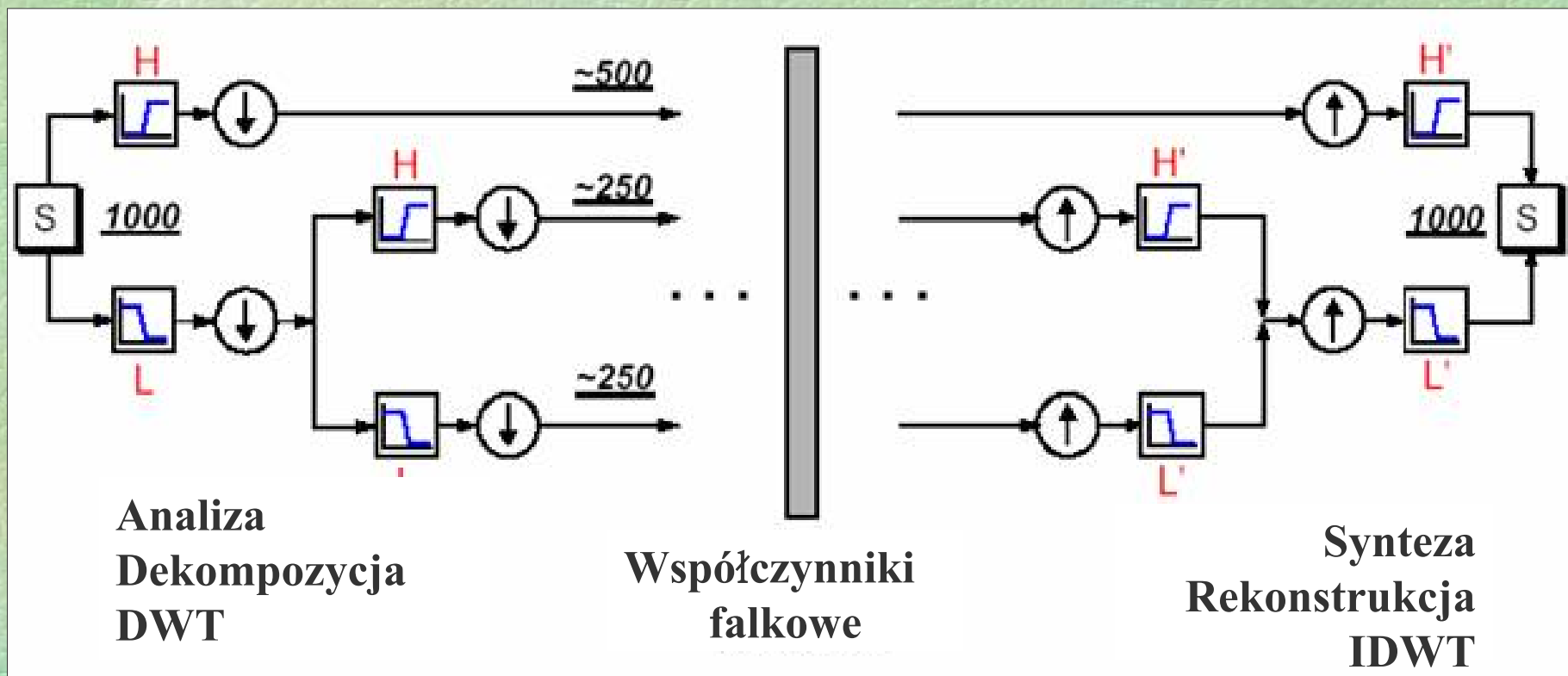
Wieloetapowa dekompozycja i rekonstrukcja

Proces wieloetapowej analizy – syntezy może być przedstawiony w następujący sposób:





Proces ten obejmuje dwa aspekty: **dzielenie** sygnału w celu otrzymania współczynników falkowych i **odtworzenie** sygnału z tych współczynników.



Oczywiście nie ma sensu dzielenia sygnału tylko w celu jego bezpośredniej rekonstrukcji.

Możemy zmodyfikować współczynniki falkowe zanim przejdziemy do kroku rekonstrukcji.

Wykonujemy analizę falkową ponieważ otrzymane w ten sposób współczynniki mają wiele zastosowań, wśród których głównymi są odszumianie i kompresja.

Ale analiza falkowa jest wciąż nową i dopiero wyłaniającą się dziedziną.

Bez wątpienia nie odkryto jeszcze wiele nieznanых zastosowań współczynników falkowych.