

# Systemy przetwarzania sygnałów

## *Procedury obliczeniowe DWT*



**wykład No 10**

# Dyskretna transformata falkowa z wykorzystaniem falek Haara

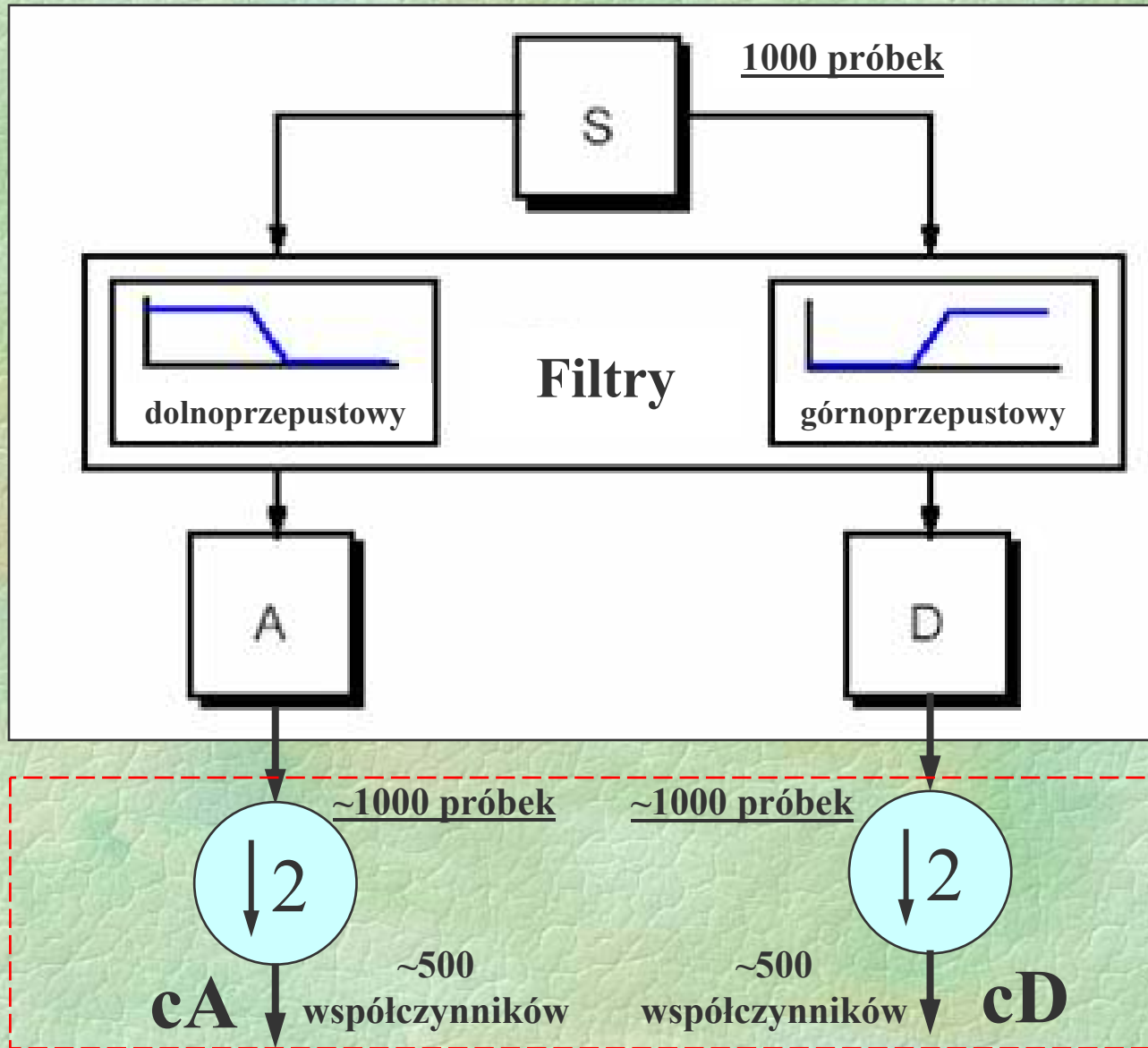


**Alfréd Haar**

1885 -1933

Przypomnijmy, że istotą DWT jest podział pierwotnego sygnału za pomocą pary filtrów (górnoprzepustowego i dolnoprzepustowego) na dwie składowe i następnie hierarchiczna dekompozycja jednej z tych składowych (niskoczęstotliwościowej) w analogiczny sposób.

# Pojedynczy krok wielopoziomowej dekompozycji danych



Na każdym etapie realizacji **piramidy Mallata** wykonywana jest bazowa operacja splotu wejściowego szeregu danych  $x(n)$  z dwoma zestawami współczynników wagowych:

Współczynniki  
aproxymacji

współczynniki odpowiedzi impulsowej filtru  
dolnoprzepustowego

$$a_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{L-1} g_m \cdot a_{2n+m}^{(i-1)}, \quad i = \overline{1, K},$$

detale

współczynniki odpowiedzi impulsowej filtru  
górnoprzepustowego

$$d_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{L-1} h_m \cdot a_{2n+m}^{(i-1)}, \quad a_n^{(0)} = x(n)$$

oraz operacja „downsamplingu” – odrzucania co drugiej próbki odfiltrowanego sygnału w każdej ze składowych w celu redukcji nadmiarowości zbioru danych.

Na dzień dzisiejszy istnieje wiele opracowanych zestawów współczynników filtrów. Są to filtry Haara, Daubechies, Coiflety, Simflety i inne.

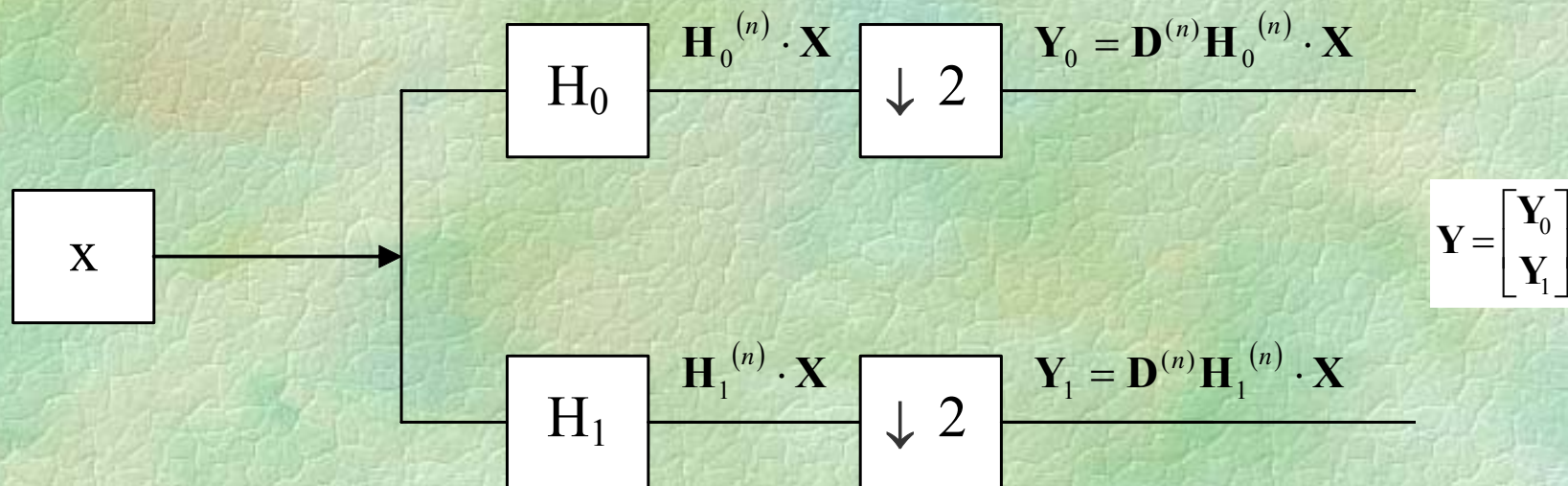
DWT w bazie Haara jest **najprostszym**,  
lecz dość skutecznym sposobem wieloskalowej  
reprezentacji danych.

Zastosowanie filtrów Haara powoduje, że na  
każdym etapie dekompozycji procedura  
dolnoprzepustowej filtracji sprowadza się do  
obliczania **znormalizowanej wartości średniej**  
**sąsiednich elementów sekwencji danych**, zaś  
procedura filtracji górnoprzepustowej – do  
**obliczania znormalizowanej różnicy tych**  
**samych elementów**.

Filtr pasmowy  $H$  przekształca wejście  $x$  w wyjście  $y=H(x)$ .

Jeśli filtr pasmowy jest liniowy, to odpowiednie transformaty mogą być reprezentowane jako macierz  $H$ , a obliczenie transformaty sygnału  $X$  osiąga się przez obliczenie mnożenia macierzy  $Y=H \cdot X$ .

Poniższy schemat pokazuje dobrze znany przykład filtru pasmowego stosowanego do analizy, który rozdziela częstotliwości sygnału dyskretnego na niskie i wysokie.







Operacja downsamplingu może być reprezentowana za pomocą macierzy:

$$\mathbf{D}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

która wybiera pierwszy, trzeci, itd. element  $\mathbf{X}$ .





Górna i dolna gałąź filtru pasmowego wytwarza odpowiednio:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{L}^{(n)} \mathbf{X}$$

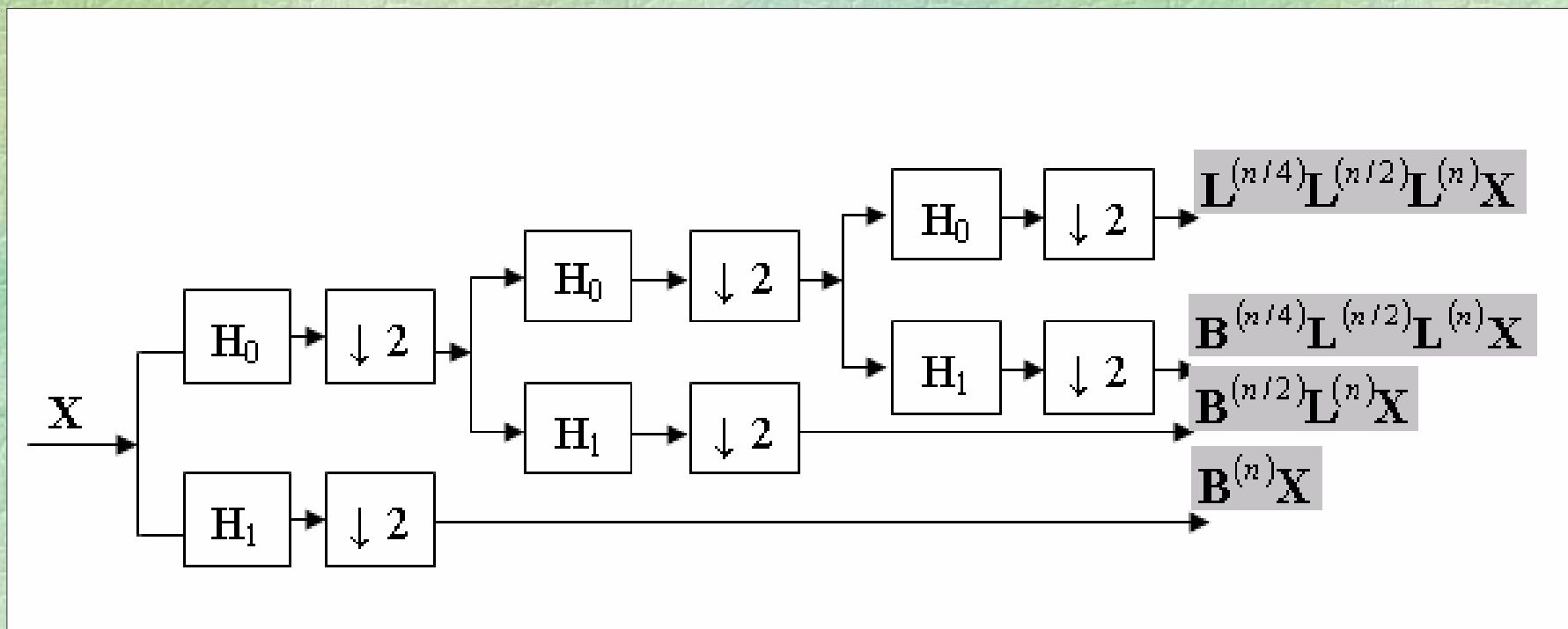
$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{X}$$

Wyjściem filtru pasmowego jest:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ - \\ \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{(n)} \cdot \mathbf{X} \\ - \\ \mathbf{B}^{(n)} \cdot \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{(n)} \cdot \mathbf{X}, \text{ gdzie}$$

$$\mathbf{H}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{(n)} \\ - \\ \mathbf{B}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Możemy także zbudować hierarchiczną reprezentację sygnału poprzez rekursywne filtrowanie niskoprzepustowego wyjścia filtru pasmowego:



W każdym kroku rekursji wielkość sygnału zmniejsza się dwukrotnie.

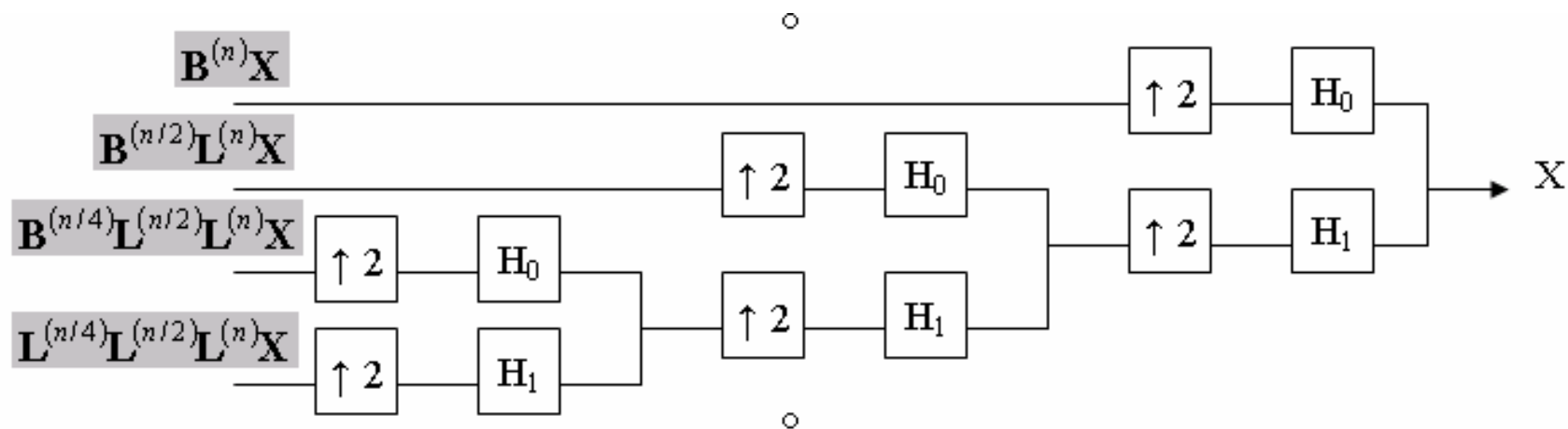
Jeśli sygnał jest dyskretny i skończony (i jego długość jest potęgą dwójki), to możemy w ostateczności uzyskać sygnał o długości jednej próbki.

Suma wymiarów wszystkich wyjść jest równa wymiarowi oryginalnego sygnału wejściowego.

Ostateczna, hierarchiczna reprezentacja sygnału wejściowego jest zbiorem *współczynników szczegółowości* o różnych poziomach rozkładu (skale) i gruboziarnistą wersją oryginalnego sygnału (wyjście filtru dolnoprzepustowego).



Odwrótną transformatę Haara można przedstawić w następujący sposób:



Wzór na odtworzenie współczynnika aproksymacji będzie miał postać:

$$\mathbf{a}_1^{(n-1)} = (\mathbf{L}^{(n)})^T \cdot \mathbf{a}_2^{(n)} + (\mathbf{B}^{(n)})^T \cdot \mathbf{c}_2^{(n)},$$

gdzie macierze  $(\mathbf{L}^{(n)})^T$  i  $(\mathbf{B}^{(n)})^T$  wyglądają następująco:





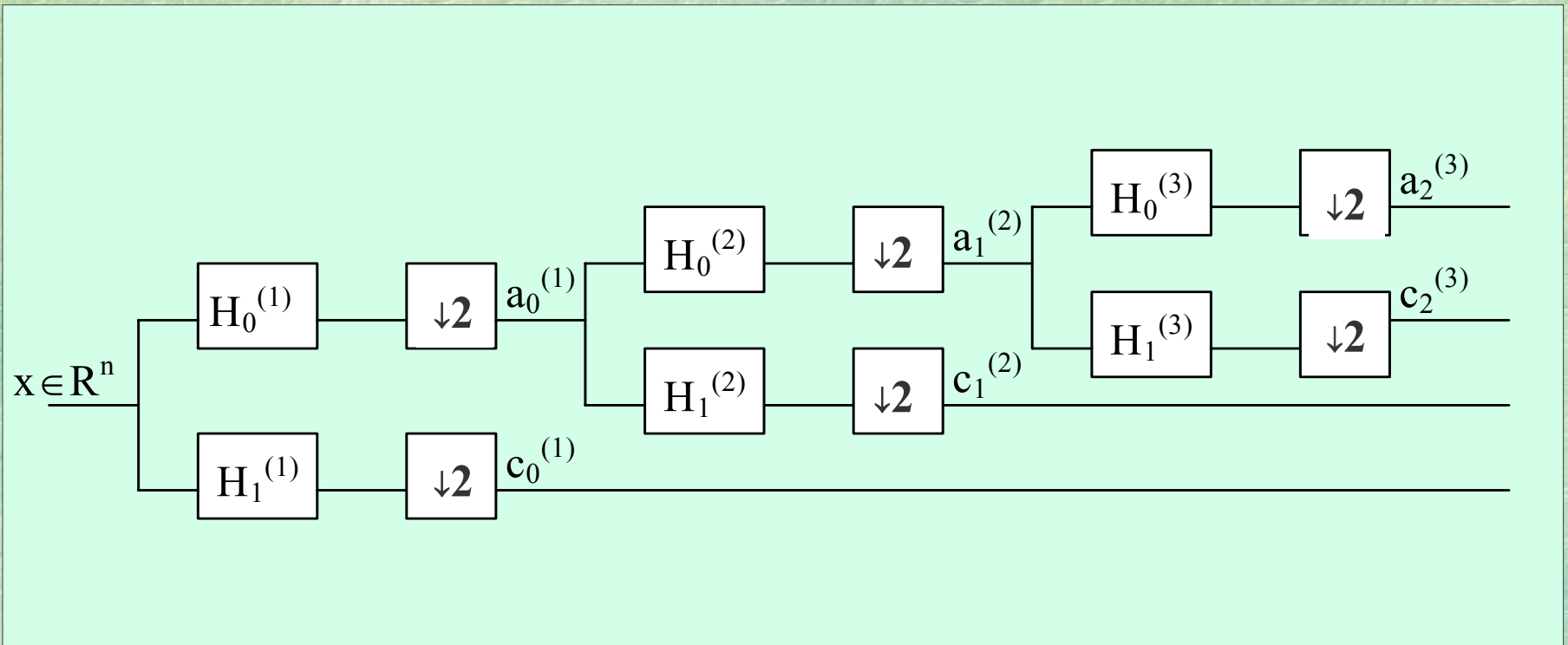
Operacja rekonstrukcji sygnału w całym bloku filtrującym będzie miała postać:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -1 & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

# Przykłady:

## Transformata Falkowa Haara dla $N=8$

$$\mathbf{X} = [x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T$$



## Krok 1:

$$\mathbf{a}_0^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{H}_0^{(1)} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{X},$$

$$\mathbf{c}_0^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{H}_1^{(1)} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{X}$$

Macierze dla odpowiednich filtrów  
wyglądają następująco:

$$\mathbf{H}_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operacja downsamplingu będzie reprezentowana przez macierz:

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze przekształceń  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{B}$  mają więc postać:

$$\mathbf{L}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

W wyniku otrzymujemy wektory:

$$\mathbf{a}_0^{(1)} = \left[ \frac{x_0 + x_1}{\sqrt{2}} \quad \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{2}} \quad \frac{x_4 + x_5}{\sqrt{2}} \quad \frac{x_6 + x_7}{\sqrt{2}} \right]^T$$

$$\mathbf{c}_0^{(1)} = \left[ \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{2}} \quad \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{2}} \quad \frac{x_4 - x_5}{\sqrt{2}} \quad \frac{x_6 - x_7}{\sqrt{2}} \right]^T$$

## Krok 2:

$$\mathbf{a}_1^{(2)} = \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{H}_0^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)} = \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)},$$

$$\mathbf{c}_1^{(2)} = \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{H}_1^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)} = \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)}$$

Macierze dla odpowiednich filtrów  
wyglądają następująco:

$$\mathbf{H}_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operacja downsamplingu będzie reprezentowana przez macierz:

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze przekształceń  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{B}$  mają więc postać:

$$\mathbf{L}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

W wyniku otrzymamy wektory:

$$\mathbf{a}_1^{(2)} = \left[ \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{2} \quad \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2} \right]^T$$

$$\mathbf{c}_1^{(2)} = \left[ \frac{x_0 + x_1 - x_2 - x_3}{2} \quad \frac{x_4 + x_5 - x_6 - x_7}{2} \right]^T$$

### Krok 3:

$$\mathbf{a}_2^{(3)} = \mathbf{D}^{(3)}\mathbf{H}_0^{(3)} \cdot \mathbf{a}_1^{(2)} = \mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{a}_1^{(2)},$$

$$\mathbf{c}_2^{(3)} = \mathbf{D}^{(3)}\mathbf{H}_1^{(3)} \cdot \mathbf{a}_1^{(2)} = \mathbf{B}^{(3)} \cdot \mathbf{a}_1^{(2)}$$

$$\mathbf{H}_0^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operacja downsamplingu będzie reprezentowana przez macierz:

$$\mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze przekształceń **L** i **B** mają więc postać:

$$\mathbf{L}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Otrzymamy skalary:

$$a_2^{(3)} = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}}$$

$$c_2^{(3)} = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7}{2\sqrt{2}}$$

# Odwrotna Transformata Falkowa Haara $N=8$

**Krok 1:**  $\mathbf{a}_1^{(2)} = (\mathbf{L}^{(3)})^T \cdot \mathbf{a}_2^{(3)} + (\mathbf{B}^{(3)})^T \cdot \mathbf{c}_2^{(3)}$

$$(\mathbf{L}^{(3)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-x_0 - x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{2} \\ \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2} \end{bmatrix}$$

**Krok 2:**  $\mathbf{a}_0^{(1)} = (\mathbf{L}^{(2)})^T \cdot \mathbf{a}_1^{(2)} + (\mathbf{B}^{(2)})^T \cdot \mathbf{c}_1^{(2)}$

$$(\mathbf{L}^{(2)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(1)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1 - x_2 - x_3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-x_0 - x_1 + x_2 + x_3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x_4 + x_5 - x_6 - x_7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-x_4 - x_5 + x_6 + x_7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1}{\sqrt{2}} \\ x_2 + x_3 \\ \frac{x_4 + x_5}{\sqrt{2}} \\ x_6 + x_7 \\ \frac{x_6 + x_7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

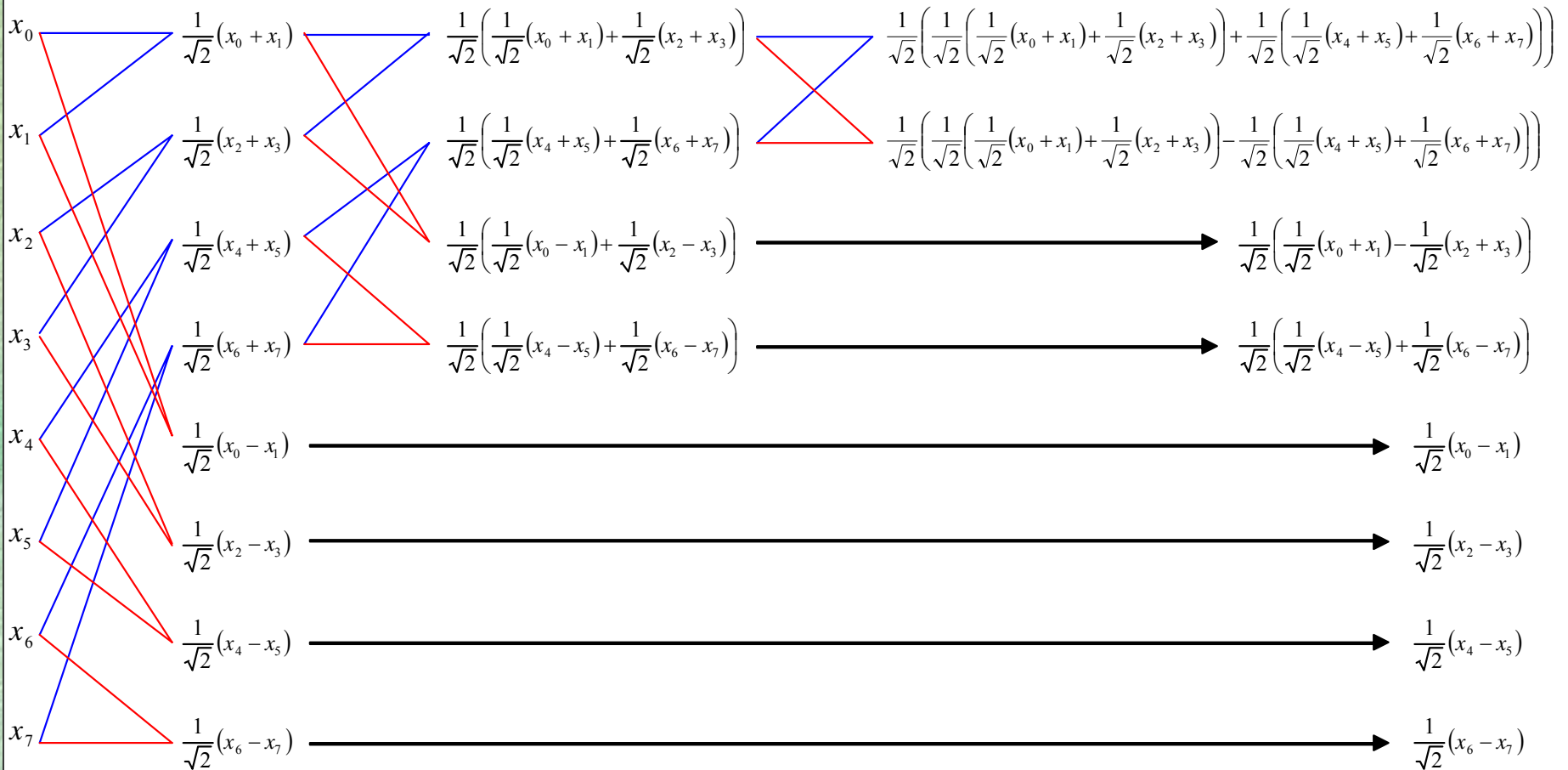
**Krok 3:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{L}^{(1)})^T \cdot \mathbf{a}_0^{(1)} + (\mathbf{B}^{(1)})^T \cdot \mathbf{c}_0^{(1)}$

$$(\mathbf{L}^{(1)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(1)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{x_0 + x_1}{2} \\ x_0 + x_1 \\ \frac{2}{x_2 + x_3} \\ \frac{2}{x_2 + x_3} \\ \frac{2}{x_4 + x_5} \\ \frac{2}{x_4 + x_5} \\ \frac{2}{x_6 + x_7} \\ \frac{2}{x_6 + x_7} \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_1}{2} \\ -x_0 + x_1 \\ \frac{2}{x_2 - x_3} \\ \frac{2}{-x_2 + x_3} \\ \frac{2}{x_4 - x_5} \\ \frac{2}{-x_4 + x_5} \\ \frac{2}{x_6 - x_7} \\ \frac{2}{-x_6 + x_7} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

# Graf algorytmu transformaty falkowej w baze Haara dla $N=8$



# Dyskretna transformata falkowa z wykorzystaniem **filtrów Daubechies**



Ingrid Daubechies

Jest kilka rodzajów filtrów Daubechies:  
**DAUB2, DAUB4, ... , DAUB20.**

Najprostszą jest falka **DAUB4**, która ma cztery współczynniki: , gdzie:

$$c_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$



Procedura polega na przemnożeniu wektora danych wejściowych  $\mathbf{X}$  przez macierz transformaty  $\mathbf{T}$ .

Oryginalny wektor  $\mathbf{X}$  ma długość  $N$ , gdzie  $N$  musi być potęgą dwójki.

Konsekwentnie macierz filtrowania w pierwszym kroku rekursji ma rozmiar  $N \times N$ .

W następnym kroku rekursji macierz ma rozmiar  $\frac{1}{2}N \times \frac{1}{2}N$

Operacja odwrotna polega na przemnożeniu wektora współczynników przez macierz odwrotną, która jest po prostu transpozycją macierzy transformaty.

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c_0 & c_3 & & & & & & & c_2 & c_1 \\ c_1 & -c_2 & & & & & & & c_3 & -c_0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_3 & & & & & & \\ c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & c_2 & c_1 & c_0 & c_3 & \\ & & & & & c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 & \\ & & & & & & & c_2 & c_1 & c_0 & c_3 \\ & & & & & & & c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 \end{bmatrix}$$

Macierz  $T^T$  jest odwrotną do macierzy  $T$ , wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą dwa równania:

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$
$$c_2c_0 + c_3c_1 = 0$$

Dodatkowo potrzebujemy zależności:

$$c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0$$
$$0 \cdot c_3 - 1 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_0 = 0$$

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

$$c_2 c_0 + c_3 c_1 = 0$$

$$c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0$$

$$0 \cdot c_3 - 1 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_0 = 0$$

Równania te są czterema równaniami z czterema niewiadomymi  $c_0, c_1, c_2, c_3$  po raz pierwszy odkrytymi przez **Ingrid Daubechies**.

Rozwiązaniem tych równań są cztery współczynniki przedstawione już wcześniej:

$$c_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

**DAUB4** jest najbardziej zwartym zbiorem ze zbiorów współczynników falkowych.

Jeśli będziemy mieli **sześć** współczynników w miejsce czterech, otrzymamy rozwiązanie postaci.

$$c_0 = \frac{1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}, \quad c_1 = \frac{5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}},$$
$$c_3 = \frac{10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}, \quad c_4 = \frac{5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}, \quad c_5 = \frac{1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$$

To jest zbiór współczynników **DAUB6**.

Przykład:

**Transformata Falkowa „Daubechies-4”,  $N=8$**

$$\mathbf{X} = [x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T$$

**Krok 1:**  $\mathbf{a}_0^{(1)} = \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{X}$        $\mathbf{c}_0^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{X}$



W wyniku otrzymamy dwa wektory o wymiarze  $4 \times 1$ :  $\mathbf{a}_0^{(1)}$  i  $\mathbf{c}_0^{(1)}$ .

**Krok 2:**  $\mathbf{a}_1^{(2)} = \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)}$        $\mathbf{c}_1^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)}$

Macierze dla odpowiednich filtrów mają postać:

$$\mathbf{L}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_1 & -c_0 & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}$$

W wyniku otrzymamy dwa wektory o wymiarze  $2 \times 1$ :  $\mathbf{a}_1^{(2)}$  i  $\mathbf{c}_1^{(2)}$ .

W ten sposób otrzymaliśmy zakończyliśmy proces transformaty, którą można przedstawić za pomocą schematu:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0^{(1)}_0 \\ a_0^{(1)}_1 \\ a_0^{(1)}_2 \\ a_0^{(1)}_3 \\ \hline c_0^{(1)}_0 \\ c_0^{(1)}_1 \\ c_0^{(1)}_2 \\ c_0^{(1)}_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1^{(2)}_0 \\ a_1^{(2)}_1 \\ \hline c_1^{(2)}_0 \\ c_1^{(2)}_1 \\ \hline c_0^{(1)}_0 \\ c_0^{(1)}_1 \\ c_0^{(1)}_2 \\ c_0^{(1)}_3 \end{bmatrix}$$

# Odwrotna transformata falkowa „Daubechies-4”, $N=8$

**Krok 1:**  $\mathbf{a}_0^{(1)} = (\mathbf{L}^{(2)})^T \cdot \mathbf{a}_1^{(2)} + (\mathbf{B}^{(2)})^T \cdot \mathbf{c}_1^{(2)}$

Macierze dla odpowiednich filtrów wyglądają następująco:

$$(\mathbf{L}^{(2)})^T = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(2)})^T = \begin{bmatrix} c_3 & c_1 \\ -c_2 & -c_0 \\ c_1 & c_3 \\ -c_0 & -c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Krok\ 2:} \quad \mathbf{X} = (\mathbf{L}^{(1)})^T \cdot \mathbf{a}_0^{(1)} + (\mathbf{B}^{(1)})^T \cdot \mathbf{c}_0^{(1)}$$

Macierze dla odpowiednich filtrów mają postać:

$$(\mathbf{L}^{(1)})^T = \begin{bmatrix} c_0 & & & & & & & c_2 \\ c_1 & & & & & & & c_3 \\ c_2 & c_0 & & & & & & \\ c_3 & c_1 & & & & & & \\ & c_2 & c_0 & & & & & \\ & c_3 & c_1 & & & & & \\ & & c_2 & c_0 & & & & \\ & & c_3 & c_1 & & & & \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(1)})^T = \begin{bmatrix} c_3 & & & & & & & c_1 \\ -c_2 & & & & & & & -c_0 \\ c_1 & c_3 & & & & & & \\ -c_0 & -c_2 & & & & & & \\ & c_1 & c_3 & & & & & \\ & -c_0 & -c_2 & & & & & \\ & & c_1 & c_3 & & & & \\ & & -c_0 & -c_2 & & & & \end{bmatrix}$$

W ten sposób odzyskujemy wektor  $\mathbf{X}$  o wymiarze  $1 \times 8$ .

Jeśli chcemy podobnie jak w transformacie Haara w ostatnim kroku uzyskać skalary, musimy zastosować transformatę, w której współczynniki aproksymacji i szczegółowości obliczamy z następujących równań:

$$a_i = c_0 \cdot x_{2i} + c_1 \cdot x_{2i+1} + c_2 \cdot x_{2i+2} + c_3 \cdot x_{2i+3}$$

$$c_i = c_3 \cdot x_{2i} - c_2 \cdot x_{2i+1} + c_1 \cdot x_{2i+2} - c_0 \cdot x_{2i+3}$$

Macierze odpowiednich filtracji będą miały postać:

$$\mathbf{L}^{(1)} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} c_2 & c_3 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & -c_2 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} c_1 & -c_0 \end{array} \right]$$



Istnieją trzy metody radzenia sobie z tym problemem:

1. Potraktowanie zbioru danych jako okresowych.

Na początek sekwencji danych wstawiamy końcowe elementy sygnału (w przypadku DWT), lub na końcu wektora umieszczamy początkowe elementy sekwencji danych (w przypadku IDWT).

2. Powtórzenie skrajnych elementów znajdujących się po każdej stronie wektora danych (na początku i na końcu) tyle razy ile jest to konieczne dla uzupełnienia niezbędnej długości wektora.

3. Dopisywanie po jednej lub obydwu stronach wektora danych odpowiedniej liczby „zer”.

**Krok 1:** W pierwszym kroku będziemy więc mnożyć macierz  $\mathbf{L}^{(1)}$  i macierz  $\mathbf{B}^{(1)}$  przez wektor:

$$\mathbf{X} = [x_6 \quad x_7 \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T$$

Otrzymamy:

$$\mathbf{a}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} c_0 x_6 + c_1 x_7 + c_2 x_0 + c_3 x_1 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ c_0 x_2 + c_1 x_3 + c_2 x_4 + c_3 x_5 \\ c_0 x_4 + c_1 x_5 + c_2 x_6 + c_3 x_7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} c_3 x_6 - c_2 x_7 + c_1 x_0 - c_0 x_1 \\ c_3 x_0 - c_2 x_1 + c_1 x_2 - c_0 x_3 \\ c_3 x_2 - c_2 x_3 + c_1 x_4 - c_0 x_5 \\ c_3 x_4 - c_2 x_5 + c_1 x_6 - c_0 x_7 \end{bmatrix}$$

**Krok 2:** W drugim kroku będziemy obliczać równania:  $\mathbf{a}_1^{(2)} = \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)+}$ ;  $\mathbf{c}_1^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_0^{(1)+}$ ,

gdzie wektor  $\mathbf{a}_0^{(1)+}$  jest wektorem  $\mathbf{a}_0^{(1)}$ , do którego początku dodano dwa końcowe elementy, macierze  $\mathbf{L}^{(2)}$  i  $\mathbf{B}^{(2)}$  będą miały postać

$$\mathbf{L}^{(2)} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \end{array} \right]$$

**Krok 3:** będziemy obliczać równania:

$$\mathbf{a}_2^{(3)} = \mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{a}_1^{(2)+}; \quad \mathbf{c}_2^{(3)} = \mathbf{B}^{(3)} \cdot \mathbf{a}_1^{(2)+}$$

$$\mathbf{L}^{(3)} = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3]$$

$$\mathbf{B}^{(3)} = [c_3 \quad -c_2 \quad c_1 \quad -c_0]$$

Operacja odwrotna składa się z następujących kroków:

**Krok 1:**  $\mathbf{a}_1^{(2)} = (\mathbf{L}^{(3)})^T \cdot \mathbf{a}_2^{(3)+} + (\mathbf{B}^{(3)})^T \cdot \mathbf{c}_2^{(3)+}$

gdzie macierze  $(\mathbf{L}^{(3)})^T$  i  $(\mathbf{B}^{(3)})^T$  mają postać:

$$(\mathbf{L}^{(3)})^T = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(3)})^T = \begin{bmatrix} c_3 \\ -c_2 \\ c_1 \\ -c_0 \end{bmatrix}$$

**Krok 2:**  $\mathbf{a}_0^{(1)} = (\mathbf{L}^{(2)})^T \cdot \mathbf{a}_1^{(2)+} + (\mathbf{B}^{(2)})^T \cdot \mathbf{c}_1^{(2)+}$ ,  
gdzie macierze  $(\mathbf{L}^{(2)})^T$  i  $(\mathbf{B}^{(2)})^T$  mają postać:

$$(\mathbf{L}^{(2)})^T = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & 0 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ \hline & c_2 \\ & c_3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(2)})^T = \begin{bmatrix} c_3 & 0 \\ -c_2 & 0 \\ c_1 & c_3 \\ -c_0 & -c_2 \\ \hline & c_1 \\ & -c_0 \end{bmatrix}$$

**Krok 3:**  $\mathbf{X} = \mathbf{a}_0^{(1)} \cdot (\mathbf{L}^{(1)})^T + \mathbf{c}_0^{(1)} \cdot (\mathbf{B}^{(1)})^T$

$$(\mathbf{L}^{(1)})^T = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_0 & 0 \\ 0 & c_4 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_1 \\ \hline & & & c_2 \\ & & & c_3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{(1)})^T = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_3 & 0 & 0 \\ -c_0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & 0 \\ 0 & -c_0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_3 \\ 0 & 0 & -c_0 & -c_2 \\ \hline & & & c_1 \\ & & & -c_0 \end{bmatrix}$$

